TD - 2/3 - Correction

Transferts thermiques par convection - rayonnement

Exercice 3 série 2: Isolation thermique d'une fenêtre avec simple / double vitrage

On reprend ici certains calculs de l'isolation thermique, non plus d'un vitrage double, mais pour une véritable fenêtre double, analogue à celles utilisées dans les pays froids (Russie, Ukraine, pays scandinaves). Le premier vitrage est double. Il est constitué de deux vitres épaisses, $4mm$ de verre ($\lambda = 0,65W/m.K$), séparées par une couche d'air de $5mm$ ($\lambda = 0,022W/m.K$) d'épaisseur. Un deuxième vitrage est placé derrière le premier, du côté logement. Ce vitrage est éloigné du premier par une couche d'air épaisse (de l'ordre de $20cm$, mais cette valeur ne sera pas utile dans les calculs). Ce deuxième vitrage est constitué soit d'une simple vitre de verre de $4mm$ d'épaisseur (voir Figure), cas de la configuration n°1, ou bien il est double, étant identique au premier vitrage, cas de la configuration n°2. La température à l'intérieur du logement est $T_{\infty 2} = 20°C$. Celle de l'extérieur est $T_{\infty 1} = -10°C$. Il existe des coefficients de convection qui sont pris égaux à $h_1 = 50W/m^2K$ pour l'extérieur et $h_2 = 10W/m^2K$ pour l'intérieur du logement. On suppose qu'il existe une cellule de convection au sein de la couche d'air centrale, de coefficient $h_0 = 2W/m^2K$.

1. Calculer la résistance thermique de la fenêtre double dans le cas de la configuration n°1 (celle de la Figure), en prenant en compte les coefficients de convection pour l'air à l'extérieur et à l'intérieur du logement, h_1 et h_2, ainsi que celui de la couche d'air centrale h_0.

2. En déduire le flux thermique

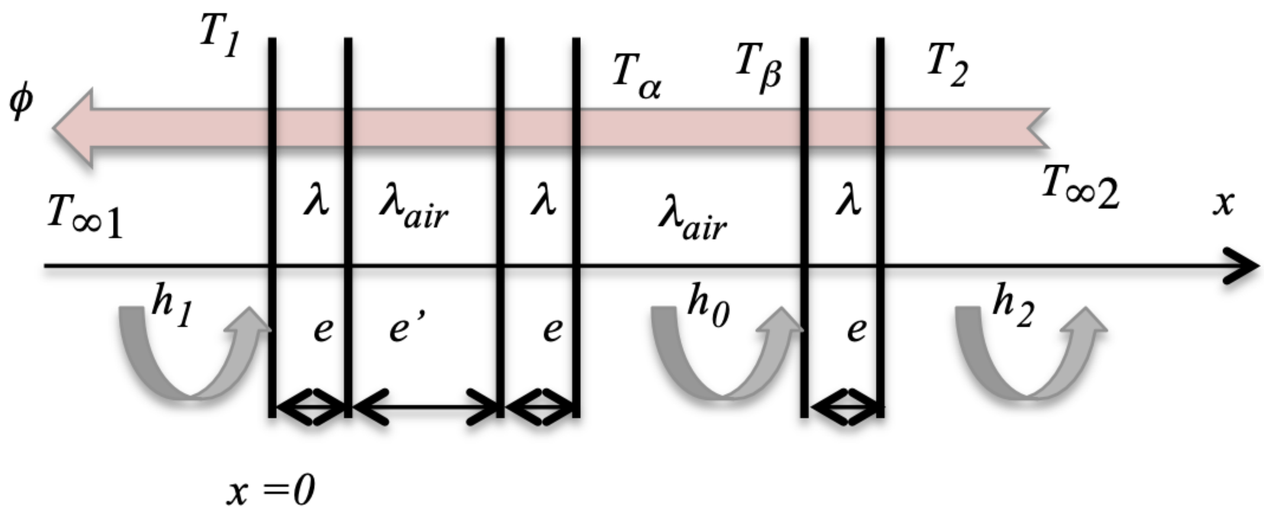
   (a) calculer les températures T_2 de la vitre, côté logement, ainsi que celle T_1 de la vitre côté extérieur.

   (b) Calculer alors la température T_β de la vitre du deuxième vitrage, ainsi que celle T_α de la deuxième vitre du premier vitrage (voir Figure pour les notations).

3. Refaire l'ensemble de tous les calculs de la question 1 et 2 pour le cas de la configuration n°2 où le deuxième vitrage, qui est donc double cette fois-ci, est identique au premier. Que suggèrent les résultats obtenus en termes d'isolation thermique supplémentaire, en comparant les deux configurations ? Est-ce que le deuxième double vitrage se justifie ?

4. En utilisant la relation de définition du flux de chaleur dans la couche d'air centrale $\Phi = h_0 s(T_\beta - T_\alpha)$, calculer alors h_0, à partir des valeurs numériques obtenues pour Φ $T\alpha$ et T_β , pour les deux configurations n°1 et n°2.

5. montrer que l'on retrouve bien la valeur de $h_0 = 2W/m^2K$ pour l'une ou l'autre des deux configurations n°1 et n°2.
   Justifier alors ce résultat sur la base d'un calcul analytique précis et rigoureux, différent bien entendu dans les détails pour chaque configuration (n°1 et n°2).



Solution :

1- Pour le cas de la fenêtre double avec un deuxième vitrage qui reste simple, cf. Figure jointe, la résistance thermique globale s'écrit :

$$R^{1}_{Global} = \frac{1}{h_1} + \frac{e}{\lambda} + \frac{e'}{\lambda_{air}} + \frac{e}{\lambda} + \frac{1}{h_0} + \frac{e}{\lambda} + \frac{1}{h_2} = \frac{1}{h_1} + \frac{3e}{\lambda} + \frac{e'}{\lambda_{air}} + \frac{1}{h_0} + \frac{1}{h_2},$$

$$R^{1}_{Global} = \frac{1}{50} + \frac{0{,}012}{0{,}65} + \frac{0{,}005}{0{,}022} + \frac{1}{2} + \frac{1}{10} = 0{,}02 + 0{,}01846 + 0{,}22727 + 0{,}5 + 0{,}1 = 0{,}86573 \ m^2K/W .$$

Or, par définition : $R^{1}_{Global}.\phi = T_{\infty 2} - T_{\infty 1}$, d'où $R^{1}_{Global}\phi = T_{\infty 2} - T_{\infty 1}$,

soit : $\phi = \frac{30}{0{,}86573} = 34{,}653 \ W/m^2$. Il est alors possible de calculer les températures de part et d'autre sur les faces avant et arrière de la double fenêtre (T_1 sur la vitre à l'extérieur, ainsi que T_2 sur la vitre à l'intérieur du logement). Les calculs sont les suivants :

$$T_1 = T_{\infty 1} + \frac{\phi}{h_1} = -10 + \frac{34{,}653}{50} = -9{,}31 \ °C \text{, et } T_2 = T_{\infty 2} - \frac{\phi}{h_2} = 20 - \frac{34{,}653}{10} = 16{,}53 \ °C .$$

Il est aussi possible de calculer les températures T_α et T_β de part et d'autre, à l'intérieur de l'espace d'air au milieu des deux vitrages (cf. Figure) :

$$T_\alpha = T_1 + \phi\left(\frac{e}{\lambda} + \frac{e'}{\lambda_{air}} + \frac{e}{\lambda}\right) = -9{,}31 + 34{,}653\ .\ 0{,}2393 = -1{,}02\ °C,$$

$$T_\beta = T_2 - \phi\frac{e}{\lambda} = 16{,}53 - 0{,}213 = 16{,}32\ °C.$$

2- On reprend l'ensemble des calculs de la question précédente, pour le cas d'une véritable fenêtre double, à double vitrage (cf. Figure jointe). On trouve les résultats suivants :

$$R^2_{Global} = \frac{1}{h_1} + \frac{e}{\lambda} + \frac{e'}{\lambda_{air}} + \frac{e}{\lambda} + \frac{1}{h_0} + \frac{e}{\lambda} + \frac{e'}{\lambda_{air}} + \frac{e}{\lambda} + \frac{1}{h_2} = \frac{1}{h_1} + \frac{4e}{\lambda} + \frac{2e'}{\lambda_{air}} + \frac{1}{h_0} + \frac{1}{h_2},$$

soit : $R^2_{Global} = \frac{1}{50} + \frac{0{,}016}{0{,}65} + \frac{0{,}01}{0{,}022} + \frac{1}{2} + \frac{1}{10} = 0{,}02 + 0{,}0246 + 0{,}4545 + 0{,}5 + 0{,}1 = 1{,}0991\ m^2K/W$.

Le flux thermique correspondant est simplement fourni par la relation usuelle :

$\phi' = \frac{T_{\infty 2} - T_{\infty 1}}{R^2_{Global}} = \frac{30}{1{,}0991} = 27{,}295\ W/m^2$. Il est alors possible de calculer comme précédemment les 4 températures de référence :

$$T_1' = T_{\infty 1} + \frac{\phi}{h_1} = -10 + \frac{27{,}295}{50} = -9{,}45\ °C \text{ , et } T_2' = T_{\infty 2} - \frac{\phi}{h_2} = 20 - \frac{27{,}295}{10} = 17{,}27\ °C.$$

$$T_\alpha' = T_1' + \phi\left(\frac{e}{\lambda} + \frac{e'}{\lambda_{air}} + \frac{e}{\lambda}\right) = -9{,}45 + 6{,}53 = -2{,}92\ °C,$$

$$T_\beta' = T_2' - \phi\left(\frac{e}{\lambda} + \frac{e'}{\lambda_{air}} + \frac{e}{\lambda}\right) = 17{,}27 - 6{,}53 = 10{,}74\ °C.$$

Finalement, le flux thermique avec le 2ème vitrage double est réduit de 20 %, ce qui peut éventuellement justifier l'investissement.

3- Pour effectuer les calculs demandés, il faut repartir de la relation de définition du flux thermique dans la couche centrale d'air, $\phi = h_0\left(T_\beta - T_\alpha\right)$. Il est alors possible de calculer la valeur du coefficient h_0 à partir de celles de ϕ, T_α et T_β pour les configurations n°1 et n°2, traitées dans les deux questions précédentes. Avec les valeurs numériques obtenues dans les questions 1- et 2-, on obtient :

$h_0 = \dfrac{34,653}{16,32+1,02} = 1,998 \approx 2$ (question 1), $h_0 = \dfrac{27,295}{10,74+2,92} = 1,998 \approx 2$ (question 2).

Pour les deux cas, ce résultat n'est pas un hasard, et il doit pouvoir être justifié sur la base d'arguments analytiques précis. Par exemple, si l'on reprend la configuration n°1 de la question 1-, il suffit de réécrire les relations de définition générales :

$\phi = h_0\left(T_\beta - T_\alpha\right)$, $T_\alpha = T_1 + \phi\left(\dfrac{e}{\lambda} + \dfrac{e'}{\lambda_{air}} + \dfrac{e}{\lambda}\right)$, et $T_\beta = T_2 - \phi\dfrac{e}{\lambda}$, soit :

$T_\beta - T_\alpha = T_2 - T_1 - \phi\left(\dfrac{3e}{\lambda} + \dfrac{e'}{\lambda_{air}}\right)$, avec $T_2 = T_{\infty 2} - \dfrac{\phi}{h_2}$ et $T_1 = T_{\infty 1} + \dfrac{\phi}{h_1}$, soit au final :

$T_\beta - T_\alpha = T_{\infty 2} - T_{\infty 1} - \phi\left(\dfrac{1}{h_1} + \dfrac{3e}{\lambda} + \dfrac{e'}{\lambda_{air}} + \dfrac{1}{h_2}\right)$,

c'est-à-dire : $T_\beta - T_\alpha = T_{\infty 2} - T_{\infty 1} - \phi\left(R_{Global} - \dfrac{1}{h_0}\right)$,

soit $\phi = h_0\left(T_\beta - T_\alpha\right) = h_0\left(T_{\infty 2} - T_{\infty 1}\right) - \phi h_0 R_{Global} + \phi$.

Au final, on retrouve bien la relation triviale de définition de la résistance thermique globale :

$T_{\infty 2} - T_{\infty 1} = \phi R_{Global}$, ce qui justifie complétement le résultat obtenu numériquement, avec h_0 = 1,998 au lieu de 2, à cause d'erreurs liées aux arrondis au cours des calculs. Pour le cas du deuxième vitrage double (question 2-), le raisonnement et les calculs sont directement transposables, la seule différence portant sur T_β qui s'écrit :

$T_\beta' = T_2' - \phi\left(\dfrac{e}{\lambda} + \dfrac{e'}{\lambda_{air}} + \dfrac{e}{\lambda}\right)$ au lieu de $T_\beta = T_2 - \phi\dfrac{e}{\lambda}$.

Exercice 2: Transferts thermiques par rayonnement

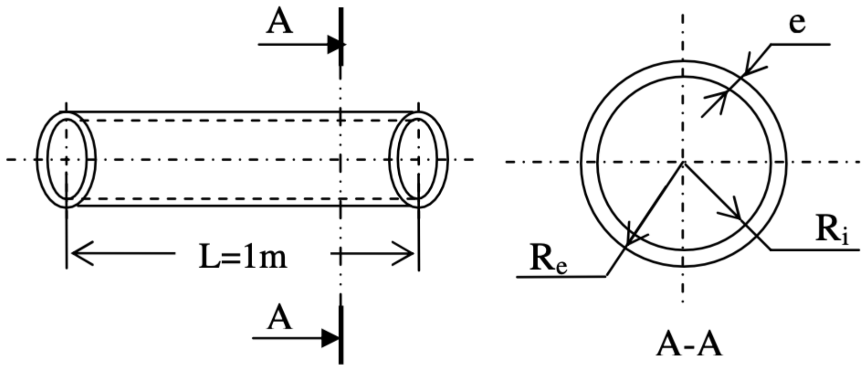
Dans un tube cylindrique en cuivre de $75cm$ de longueur, de $1.5cm$ de diamètre et de $(1/8)mm$ d'épaisseur circule un courant électrique de $140A$. La résistivité du cuivre ($\rho = 1.7\mu\Omega cm$).

$$Re - Ri = e$$

$$Re + Ri \approx D$$

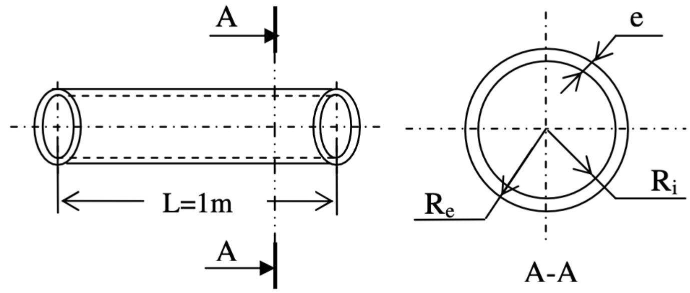
1. Quelle est la puissance dissipée par effet Joule?

2. Cette énergie est rayonnée par la surface extérieure du tube à la température de $683K$. Calculer le facteur d'émission total hémisphérique du cuivre. (La constante de Stefan-Boltzmann: $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} W/m^2$



Solution

1. **La puissance dissipée par effet Joule:**



$P = R.I^2$;

$R = \rho.\dfrac{L}{s}$;

$s = \pi.R_e^2 - \pi.R_i^2 = \pi(R_e - R_i)(R_e + R_i)$;

$R_e - R_i = e$; $R_e + R_i \cong D$

$\Rightarrow s = \pi.D.e$

$$R = \rho\frac{L}{\pi.D.e} = 1{,}7.10^{-8}\Omega m \frac{0{,}75m}{\pi.1{,}5.10^{-2}.1{,}25.10^{-4}m^2} = 2{,}16.10^{-3}\Omega$$

$P = 2{,}16.10^{-3}.(140)^2 = 42{,}336W$

2. **Le facteur d'émission total hémisphérique du cuivre:**

$$P = \Phi = \varepsilon.\sigma.S.T^4 \Rightarrow \varepsilon = \frac{P}{\sigma.S.T^4} \text{ ; } S=\pi.D.L$$

$$\varepsilon = \frac{P}{\sigma.\pi.D.L.T^4} = \frac{42{,}336}{5{,}67.10^{-8}.\pi.1{,}5.10^{-2}.0{,}75.683^4} \approx 0{,}1$$

Exercice 3: Transferts thermiques par rayonnement

Pour chauffer une pièce d'un appartement, on se sert d'un radiateur cylindrique de $2.5cm$ de diamètre et de $60cm$ de longueur. Ce radiateur rayonne comme un corps noir et émet une puissance de $1.5kW$:

1. Calculer sa température;
2. Calculer la longueur d'onde pour laquelle sa luminance est maximale;
3. quelle devrait -être sa température pour que cette longueur d'onde soit $2.3\mu m$?
4. Quelle serait alors sa puissance dégagée?

Solution

d=0,025m; L=0,60m; P=ϕ=1500W.

1. Calcul de la température:

$$\phi = \varepsilon.\sigma.S.T^4 \Rightarrow T = \sqrt[4]{\frac{\phi}{\varepsilon.\sigma.S}} = \sqrt[4]{\frac{1500}{1.5,67.10^{-8}.\pi.2,5.10^{-2}.60.10^{-2}}} = 865,6^o K$$

2. Longueur d'onde pour laquelle la luminance est maximale:

$$\phi = M.S = \pi.L.S = \sigma.T^4.S \Rightarrow L = \frac{\sigma}{\pi}.T^4 = C^{te}.T^4 = f\left(T^4\right);$$

Pour que L soit maximale $\Rightarrow \lambda_m.T = 2898 \Leftrightarrow T = \dfrac{2898}{865,599} = 3,348\mu m$

3. λ_m se déplace avec la température, la 1ère loi de Wien est aussi appelée loi de déplacement, pour λ_m=2μm: $\Rightarrow T = \dfrac{2898}{2,3} = 1260^o K$

4. La puissance dégagée à cette température:
$$P = \phi = \varepsilon.\sigma.S.T^4 = 1.5,67.10^{-8}.\pi.2,5.10^{-2}.60.10^{-2}.(1260)^4 = 6734,515W.$$