TD - 2

Transferts thermiques par conduction-convection

Exercice 1: Isolation thermique des parois d'un four

Un four est constitué de briques réfractaires de 15 cm d'épaisseur (conductivité $\lambda_b = 1W/m.K$). Il est recouvert d'un matériau isolant de conductivité $\lambda_i = 0.08W/m.K$. La température de la paroi interne du four est 1300 °C, la température de la paroi externe de l'isolant est 300 °C.

1. Calculer l'épaisseur d'isolant nécessaire pour limiter les pertes thermiques à $1000W/m^2$ (on considère donc pour simplifier que l'épaisseur d'isolant n'a pas d'influence sur la température extérieure de celui-ci).

Solution

On considère une conduction plane 1D en régime permanent, sans génération interne, avec deux couches en série (brique + isolant). Le flux imposé permet de remonter à l'épaisseur de l'isolant par la méthode des résistances thermiques. [1][2]

1. Modèle et équations

Pour une paroi plane d'épaisseur e et de conductivité λ, le flux de chaleur est

$$\phi = \frac{Q}{A} = \lambda \frac{\Delta T}{e}$$

ou, sous forme résistance thermique ,

$$\phi = \frac{\Delta T}{R}, \quad R = \frac{e}{\lambda} \text{ (par unité de surface).}$$

Pour plusieurs couches en série, les résistances s'additionnent :

$$R_{\text{tot}} = R_b + R_i = \frac{e_b}{\lambda_b} + \frac{e_i}{\lambda_i}, \quad \phi = \frac{T_{\text{int}} - T_{\text{ext}}}{R_{\text{tot}}}.$$

2. Données numériques

- Brique réfractaire : $e_b = 0{,}15$ m, $\lambda_b = 1$ W/m·K. Donc $R_b = \dfrac{0{,}15}{1} = 0{,}15 \text{ m}^2\text{K/W}$.
- Isolant : épaisseur inconnue e_i, $\lambda_i = 0{,}08$ W/m·K, donc $R_i = \dfrac{e_i}{0{,}08}$.
- Températures de surface données : $T_{\text{int}} = 1300°\text{C}$, $T_{\text{ext}} = 300°\text{C} \Rightarrow \Delta T = 1000$ K.
- Flux souhaité : $\phi = 1000 \text{ W/m}^2$.

On néglige l'influence de l'épaisseur d'isolant sur T_{ext}, donc ces valeurs de surface sont imposées.

3. Calcul de l'épaisseur de l'isolant

On impose $\phi = 1000$ W/m^2 :

$$\phi = \frac{\Delta T}{R_{\text{tot}}} \quad \Rightarrow \quad R_{\text{tot}} = \frac{\Delta T}{\phi} = \frac{1000}{1000} = 1 \text{ m}^2\text{K/W}.$$

Donc

$$R_{\text{tot}} = R_b + R_i = 0{,}15 + \frac{e_i}{0{,}08} = 1$$

On résout pour e_i

$$\frac{e_i}{0{,}08} = 1 - 0{,}15 = 0{,}85 \quad \Rightarrow \quad e_i = 0{,}85 \times 0{,}08 = 0{,}068 \text{ m}.$$

Donc l'épaisseur d'isolant nécessaire est

$$\boxed{e_i \approx 6{,}8 \text{ cm}}.$$

Exercice 2: Bilan thermique pour une plaque uniformément chauffée

De l'air à 20°C souffle sur une plaque métallique rectangulaire de 50 cm par 75 cm de côtés, uniformément chauffée, et dont la température de surface extérieure est maintenue constante, à 250 °C.

Le coefficient de conductance thermique pour les échanges thermiques de la plaque avec l'air est $h = 25W/m^2K$.

1. Calculer le flux thermique transféré.

2. La plaque est faite d'acier, de coefficient de conductivité thermique $\lambda = 43W/m.K$, ayant $2cm$ d'épaisseur. On suppose que $300W$ sont par ailleurs perdus par le mécanisme de rayonnement infrarouge.
   En écrivant un bilan élémentaire des flux thermiques, calculer la température de la surface interne de la plaque (pour fixer les idées, par exemple prise au milieu de la plaque), en notant que cette surface de référence n'est pas soumise au rayonnement et à la convection.

Solution

Le flux thermique transféré par convection de la plaque métallique vers l'air est de 2156,25 W.

La plaque, faite d'acier de 2 cm d'épaisseur avec une conductivité thermique de 43 W/m·K, perd également 300 W par rayonnement infrarouge. En considérant un bilan élémentaire des flux thermiques, la température de la surface interne de la plaque (non exposée au rayonnement ni à la convection) est calculée comme étant environ 246,95 °C.

Détails du calcul:

1. La surface de la plaque est

$$0,75 \times 0,50 = 0,375\, m^2$$

.

2. Le flux thermique convectif est calculé par la formule

$$Q = h \times A \times (T_{surface} - T_{air})$$

$$Q = 25 \times 0,375 \times (250 - 20) = 2156,25\,W$$

3. Le flux total incluant la perte par rayonnement est

$$Q_{total} = Q_{conv} + Q_{rad} = 2156,25 + 300 = 2456,25\,W$$

4. En appliquant la loi de Fourier pour la conduction thermique dans la plaque :

$$Q_{total} = \lambda \times A \times \frac{T_{int} - T_{ext}}{e}$$

où T_{int} est la température interne à trouver, $T_{ext} = 250°C$, $e = 0,02m$.

En isolant T_{int} :

$$T_{int} = T_{ext} - \frac{Q_{total} \times e}{\lambda \times A} = 250 - \frac{2456,25 \times 0,02}{43 \times 0,375} \approx 246,95°C$$

Ce calcul montre que la température interne de la plaque est légèrement inférieure à celle de la surface chauffée externe, en raison des pertes thermiques .

Exercice 3: Isolation thermique d'une fenêtre avec simple / double vitrage

On reprend ici certains calculs de l'isolation thermique, non plus d'un vitrage double, mais pour une véritable fenêtre double, analogue à celles utilisées dans les pays froids (Russie, Ukraine, pays scandinaves). Le premier vitrage est double. Il est constitué de deux vitres épaisses, $4mm$ de verre ($\lambda = 0,65W/m.K$), séparées par une couche d'air de $5mm$ ($\lambda = 0,022W/m.K$) d'épaisseur. Un deuxième vitrage est placé derrière le premier, du côté logement. Ce vitrage est éloigné du premier par une couche d'air épaisse (de l'ordre de $20cm$, mais cette valeur ne sera pas utile dans les calculs). Ce deuxième vitrage est constitué soit d'une simple vitre de verre de $4mm$ d'épaisseur (voir Figure), cas de la configuration n°1, ou bien il est double, étant identique au premier vitrage, cas de la configuration n°2. La température à l'intérieur du logement est $T_{\infty 2} = 20°C$. Celle de l'extérieur est $T_{\infty 1} = -10°C$. Il existe des coefficients de convection qui sont pris égaux à $h_1 = 50W/m^2K$ pour l'extérieur et $h_2 = 10W/m^2K$ pour l'intérieur du logement. On suppose qu'il existe une cellule de convection au sein de la couche d'air centrale, de coefficient $h_0 = 2W/m^2K$.

1. Calculer la résistance thermique de la fenêtre double dans le cas de la configuration n°1 (celle de la Figure), en prenant en compte les coefficients de convection pour l'air à l'extérieur et à l'intérieur du logement, h_1 et h_2, ainsi que celui de la couche d'air centrale h_0.

2. En déduire le flux thermique

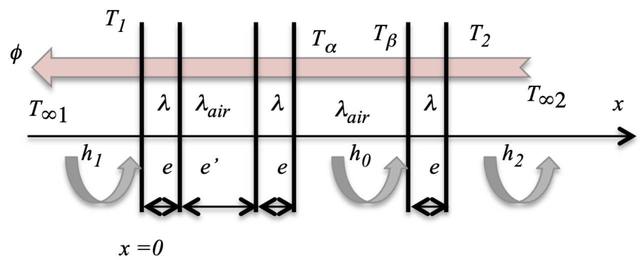
   (a) calculer les températures T_2 de la vitre, côté logement, ainsi que celle T_1 de la vitre côté extérieur.

(b) Calculer alors la température T_β de la vitre du deuxième vitrage, ainsi que celle T_α de la deuxième vitre du premier vitrage (voir Figure pour les notations).

3. Refaire l'ensemble de tous les calculs de la question 1 et 2 pour le cas de la configuration n°2 où le deuxième vitrage, qui est donc double cette fois-ci, est identique au premier. Que suggèrent les résultats obtenus en termes d'isolation thermique supplémentaire, en comparant les deux configurations ? Est-ce que le deuxième double vitrage se justifie ?

4. En utilisant la relation de définition du flux de chaleur dans la couche d'air centrale $\Phi = h_0 s(T_\beta - T_\alpha)$, calculer alors h_0, à partir des valeurs numériques obtenues pour Φ $T\alpha$ et T_β , pour les deux configurations n°1 et n°2.

5. montrer que l'on retrouve bien la valeur de $h_0 = 2W/m^2K$ pour l'une ou l'autre des deux configurations n°1 et n°2.
Justifier alors ce résultat sur la base d'un calcul analytique précis et rigoureux, différent bien entendu dans les détails pour chaque configuration (n°1 et n°2).



Solution

Solution :

1- Pour le cas de la fenêtre double avec un deuxième vitrage qui reste simple, cf. Figure jointe, la résistance thermique globale s'écrit :

$$R^1_{Global} = \frac{1}{h_1} + \frac{e}{\lambda} + \frac{e'}{\lambda_{air}} + \frac{e}{\lambda} + \frac{1}{h_0} + \frac{e}{\lambda} + \frac{1}{h_2} = \frac{1}{h_1} + \frac{3e}{\lambda} + \frac{e'}{\lambda_{air}} + \frac{1}{h_0} + \frac{1}{h_2},$$

$$R^1_{Global} = \frac{1}{50} + \frac{0{,}012}{0{,}65} + \frac{0{,}005}{0{,}022} + \frac{1}{2} + \frac{1}{10} = 0{,}02 + 0{,}01846 + 0{,}22727 + 0{,}5 + 0{,}1 = 0{,}86573\ m^2K/W.$$

Or, par définition : $R^1_{Global}.\phi = T_{\infty 2} - T_{\infty 1}$ **, d'où** $R^1_{Global}\phi = T_{\infty 2} - T_{\infty 1}$**,**

soit : $\phi = \dfrac{30}{0{,}86573} = 34{,}653\ W/m^2$**. Il est alors possible de calculer les températures de part et d'autre sur les faces avant et arrière de la double fenêtre (**T_1 **sur la vitre à l'extérieur, ainsi que** T_2 **sur la vitre à l'intérieur du logement). Les calculs sont les suivants :**

$$T_1 = T_{\infty 1} + \frac{\phi}{h_1} = -10 + \frac{34{,}653}{50} = -9{,}31\ °C, \text{ et } T_2 = T_{\infty 2} - \frac{\phi}{h_2} = 20 - \frac{34{,}653}{10} = 16{,}53\ °C.$$

Il est aussi possible de calculer les températures T_α et T_β de part et d'autre, à l'intérieur de l'espace d'air au milieu des deux vitrages (cf. Figure) :

$$T_\alpha = T_1 + \phi\left(\frac{e}{\lambda} + \frac{e'}{\lambda_{air}} + \frac{e}{\lambda}\right) = -9,31 + 34,653\ .\ 0,2393 = -1,02\ °C,$$

$$T_\beta = T_2 - \phi\frac{e}{\lambda} = 16,53 - 0,213 = 16,32\ °C.$$

2- On reprend l'ensemble des calculs de la question précédente, pour le cas d'une véritable fenêtre double, à double vitrage (cf. Figure jointe). On trouve les résultats suivants :

$$R^2_{Global} = \frac{1}{h_1} + \frac{e}{\lambda} + \frac{e'}{\lambda_{air}} + \frac{e}{\lambda} + \frac{1}{h_0} + \frac{e}{\lambda} + \frac{e'}{\lambda_{air}} + \frac{e}{\lambda} + \frac{1}{h_2} = \frac{1}{h_1} + \frac{4e}{\lambda} + \frac{2e'}{\lambda_{air}} + \frac{1}{h_0} + \frac{1}{h_2},$$

soit : $R^2_{Global} = \frac{1}{50} + \frac{0,016}{0,65} + \frac{0,01}{0,022} + \frac{1}{2} + \frac{1}{10} = 0,02 + 0,0246 + 0,4545 + 0,5 + 0,1 = 1,0991\ m^2K/W$.

Le flux thermique correspondant est simplement fourni par la relation usuelle :

$\phi' = \frac{T_{\infty 2} - T_{\infty 1}}{R^2_{Global}} = \frac{30}{1,0991} = 27,295\ W/m^2$. Il est alors possible de calculer comme précédemment les 4 températures de référence :

$$T_1' = T_{\infty 1} + \frac{\phi}{h_1} = -10 + \frac{27,295}{50} = -9,45\ °C \text{ , et } T_2' = T_{\infty 2} - \frac{\phi}{h_2} = 20 - \frac{27,295}{10} = 17,27\ °C.$$

$$T_\alpha' = T_1' + \phi\left(\frac{e}{\lambda} + \frac{e'}{\lambda_{air}} + \frac{e}{\lambda}\right) = -9,45 + 6,53 = -2,92\ °C,$$

$$T_\beta' = T_2' - \phi\left(\frac{e}{\lambda} + \frac{e'}{\lambda_{air}} + \frac{e}{\lambda}\right) = 17,27 - 6,53 = 10,74\ °C.$$

Finalement, le flux thermique avec le 2ème vitrage double est réduit de 20 %, ce qui peut éventuellement justifier l'investissement.

3- Pour effectuer les calculs demandés, il faut repartir de la relation de définition du flux thermique dans la couche centrale d'air, $\phi = h_0(T_\beta - T_\alpha)$. Il est alors possible de calculer la valeur du coefficient h_0 à partir de celles de ϕ, T_α et T_β pour les configurations n°1 et n°2, traitées dans les deux questions précédentes. Avec les valeurs numériques obtenues dans les questions 1- et 2-, on obtient :

$$h_0 = \frac{34,653}{16,32 + 1,02} = 1,998 \approx 2 \text{ (question 1)}, \quad h_0 = \frac{27,295}{10,74 + 2,92} = 1,998 \approx 2 \text{ (question 2)}.$$

Pour les deux cas, ce résultat n'est pas un hasard, et il doit pouvoir être justifié sur la base d'arguments analytiques précis. Par exemple, si l'on reprend la configuration n°1 de la question 1-, il suffit de réécrire les relations de définition générales :

$\phi = h_0(T_\beta - T_\alpha)$, $T_\alpha = T_1 + \phi\left(\frac{e}{\lambda} + \frac{e'}{\lambda_{air}} + \frac{e}{\lambda}\right)$, et $T_\beta = T_2 - \phi\frac{e}{\lambda}$, soit :

$T_\beta - T_\alpha = T_2 - T_1 - \phi\left(\frac{3e}{\lambda} + \frac{e'}{\lambda_{air}}\right)$, avec $T_2 = T_{\infty 2} - \frac{\phi}{h_2}$ et $T_1 = T_{\infty 1} + \frac{\phi}{h_1}$, soit au final :

$T_\beta - T_\alpha = T_{\infty 2} - T_{\infty 1} - \phi\left(\frac{1}{h_1} + \frac{3e}{\lambda} + \frac{e'}{\lambda_{air}} + \frac{1}{h_2}\right)$,

c'est-à-dire : $T_\beta - T_\alpha = T_{\infty 2} - T_{\infty 1} - \phi\left(R_{Global} - \frac{1}{h_0}\right)$,

soit $\phi = h_0\left(T_\beta - T_\alpha\right) = h_0\left(T_{\infty 2} - T_{\infty 1}\right) - \phi h_0 R_{Global} + \phi$.

Au final, on retrouve bien la relation triviale de définition de la résistance thermique globale :

$T_{\infty 2} - T_{\infty 1} = \phi R_{Global}$, ce qui justifie complétement le résultat obtenu numériquement, avec h_0 = 1,998 au lieu de 2, à cause d'erreurs liées aux arrondis au cours des calculs. Pour le cas du deuxième vitrage double (question 2-), le raisonnement et les calculs sont directement transposables, la seule différence portant sur T_β qui s'écrit : $T_\beta^{'} = T_2^{'} - \phi\left(\frac{e}{\lambda} + \frac{e'}{\lambda_{air}} + \frac{e}{\lambda}\right)$ au lieu de $T_\beta = T_2 - \phi\frac{e}{\lambda}$.