

Correction des exercices du cours

Statique et Cinématique des fluides

Exercice 1:

La **pression absolue** à une profondeur de $6m$ sous la surface libre de l'eau est la somme de la **pression hydrostatique** due à l'eau et de la **pression atmosphérique** indiquée par le baromètre ($760mmHg$).

0.1 Rappel du principe

La **pression absolue** à une profondeur h sous la surface libre d'eau s'écrit :

$$P_{abs} = P_{atm} + P_{hydro} = \rho_{air}gh_{Hg} + \rho_{eau}gh$$

avec :

- P_{atm} : **pression atmosphérique** due au baromètre en mercure,
- P_{hydro} : **pression hydrostatique** due à la colonne d'eau de $6m$.

0.2 Calcul de la pression atmosphérique (baromètre)

Données :

- Densité du mercure $d_m = 13,57$,
- $\rho_{eau} = 1000 \text{ kg/m}^3$,
- $\rho_{Hg} = 13,57 \times 1000 = 13\,570 \text{ kg/m}^3$,
- $g = 9,807 \text{ m/s}^2$,
- hauteur de mercure $h_{Hg} = 760 \text{ mm} = 0,760 \text{ m}$.

$$P_{atm} = \rho_{Hg} g h_{Hg} = 13\,570 \times 9,807 \times 0,760.$$

Étapes intermédiaires :

$$13\,570 \times 9,807 \approx 133\,120,5, \quad \text{puis} \quad 133\,120,5 \times 0,760 \approx 101\,171,6 \text{ Pa.}$$

0.3 Pression due à 6m d'eau

$$P_{\text{hydro}} = \rho_{\text{eau}} g h_{\text{eau}} = 1000 \times 9,807 \times 6 = 58\,842 \text{ Pa.}$$

0.4 Pression absolue à 6m

$$P_{\text{abs}} = P_{\text{atm}} + P_{\text{hydro}} = 101\,171,6 + 58\,842 = 159\,983,5524 \text{ Pa} = 159,984 \text{ kPa} = 1,6 \text{ bar.}$$

On peut arrondir proprement :

- $159\,984 \text{ Pa}$ ou $159,98 \text{ kPa}$,
- Convertie en bar : $1 \text{ bar} \approx 100\,000 \text{ Pa}$, donc $P_{\text{abs}} \approx \frac{159\,984}{100\,000} \approx 1,60 \text{ bar}$.

Exercice 2:

La pression au fond du réservoir est la somme de la pression appliquée en surface et de la pression hydrostatique due à la colonne de glycérine. Cette solution utilise la formule $P = P_0 + \rho g h$, où les données sont extraites de l'exercice.

0.5 Données de l'exercice

- Pression en surface : $P_0 = 50 \text{ kPa} = 50 \times 10^3 \text{ Pa}$.
- Densité de la glycérine : $\rho = 1,262 \text{ g/cm}^3$, soit 1262 kg/m^3 après conversion).
- Hauteur de la colonne : $h = 2 \text{ m}$
- Accélération gravitationnelle : $g = 9,807 \text{ m/s}^2$.

0.6 Calcul étape par étape

Convertissez d'abord la densité : $\rho = 1,262 \times 1000 = 1262 \text{ kg/m}^3$.

Calculez la pression hydrostatique :

$$P_{\text{hydro}} = \rho g h = 1262 \times 9,807 \times 2 = 24\,752,868 \text{ Pa.}$$

Ajoutez la pression en surface :

$$P = 50 \times 10^3 + 24\,752,868 = 74\,752,868 \text{ Pa.}$$

0.7 Unités finales

- En kPa : $74,75 \text{ kPa}$ (arrondi).
- En bar : $0,748 \text{ bar}$ ($1 \text{ bar} \approx 10^5 \text{ Pa}$)

Exercice 3:

0.8 Données de l'exercice

- $S_A = 40 \text{ cm}^2 = 4 \times 10^{-3} \text{ m}^2$
- $S_B = 4000 \text{ cm}^2 = 0,4 \text{ m}^2$
- $m_B = 4000 \text{ kg}$
- $\rho = 0,75 \times 1000 = 750 \text{ kg/m}^3$
- $g = 9,807 \text{ m/s}^2$
- $h = 5 \text{ m}$

0.9 Calcul de la pression

Selon l'équilibre des pressions (principe de Pascal adapté à la configuration) :

$$P_A + 0,75 \times 1000 \times 9,807 \times 5 = \frac{4000 \times 9,807}{0,4}$$

Pression hydrostatique :

$$P_{\text{huile}} = 750 \times 9,807 \times 5 = 36776,25 \text{ Pa}$$

Pression sous B :

$$P_B = \frac{4000 \times 9,807}{0,4} = 98070 \text{ Pa}$$

Donc :

$$P_A + 36776,25 = 98070 \implies P_A = 98070 - 36776,25 = 61293,75 \text{ Pa}$$

0.10 Force F

$$F = P_A \times S_A = 61293,75 \times 4 \times 10^{-3} = 245,175 \text{ N}$$

Cette correction correspond à l'interprétation où la colonne d'huile de 5 m s'ajoute à la pression sous A pour équilibrer celle sous B

Exercice 4:

On utilisera le principe de la pression piézométrique et l'équilibre hydrostatique pour deux liquides non miscibles dans un réservoir ouvert avec tubes piézométriques A et B. Les densités relatives sont

$$\rho_A = 720 \text{ kg/m}^3$$

et

$$\rho_B = 2360 \text{ kg/m}^3$$

avec $g = 9,807 \text{ m/s}^2$, une hauteur de liquide A de $2m$ dans le réservoir et une épaisseur de liquide B de $0,3m$ au fond.

0.11 Piézomètre A

Le tube A est connecté dans la zone du liquide A. Comme le réservoir est ouvert à l'atmosphère, le liquide A monte librement jusqu'à la hauteur libre du réservoir :

$$h_A = 2 \text{ m}$$

0.12 Piézomètre B

Le tube B est connecté au fond dans le liquide B (épaisseur $0,3\text{m}$). Le liquide B monte d'abord de $0,3\text{m}$ (équilibre avec sa propre colonne). Puis, la pression transmise par le liquide A au-dessus (hauteur équivalente $1,7\text{m}$) pousse le liquide B plus haut d'une hauteur additionnelle h'_P .

0.13 Pression due au liquide A au niveau de l'interface :

$$P_A = \rho_A \cdot g \cdot (2 - 0,3) = 720 \times 9,807 \times 1,7 = 12003,77 \text{ Pa}$$

0.14 Hauteur additionnelle dans le piézomètre B :

$$h'_P = \frac{P_A}{\rho_B \cdot g} = \frac{12003,77}{2360 \times 9,807} = 0,519 \text{ m}$$

0.15 Hauteur totale :

$$h_B = 0,3 + 0,519 = 0,819 \text{ m}$$

0.16 Pression au fond

Pression hydrostatique totale :

$$P_{\text{fond}} = \rho_A \cdot g \cdot 1,7 + \rho_B \cdot g \cdot 0,3 = (720 \times 9,807 \times 1,7) + (2360 \times 9,807 \times 0,3) = 19389,5 \text{ Pa} \approx 0,19 \text{ bar}$$

Exercice 5:

En appliquant l'équation de l'hydrostatique entre les points A et C on trouve :

$$P_C - P_A = \rho_{\text{eau}} \cdot g \cdot (Z_A - Z_C) \Rightarrow P_C = P_A + \rho_{\text{eau}} \cdot g \cdot (h + x)$$

En appliquant l'équation de l'hydrostatique entre les points C et D on trouve :

$$P_C - P_D = \rho_{\text{mercure}} \cdot g \cdot (Z_D - Z_C) \Rightarrow P_D = P_C + \rho_{\text{mercure}} \cdot g \cdot h = P_C + d_{\text{mercure}} \rho_{\text{eau}} \cdot g \cdot h$$

$$\Rightarrow P_D = P_A + \rho_{\text{eau}} \cdot g \cdot (h + x) - d_{\text{mercure}} \rho_{\text{eau}} \cdot g \cdot h$$

$$\Rightarrow P_D = P_A + \rho_{\text{eau}} \cdot g \cdot x + \rho_{\text{eau}} \cdot g \cdot h (1 - d_{\text{mercure}})$$

En appliquant l'équation de l'hydrostatique entre les points D et B on trouve :

$$\begin{aligned}P_B - P_D &= \rho_{\text{eau}} \cdot g \cdot (Z_D - Z_B) \Rightarrow P_B = P_D + \rho_{\text{eau}} \cdot g \cdot y \\ \Rightarrow P_B &= P_A + \rho_{\text{eau}} \cdot g \cdot x + \rho_{\text{eau}} \cdot g \cdot h(1 - d_{\text{mercure}}) + \rho_{\text{eau}} \cdot g \cdot y \\ \Rightarrow P_B &= P_A + \rho_{\text{eau}} \cdot g \cdot (x + y) + \rho_{\text{eau}} \cdot g \cdot h(1 - d_{\text{mercure}}) \\ \Rightarrow h &= \frac{P_B - (P_A + \rho_{\text{eau}} \cdot g \cdot (x + y))}{\rho_{\text{eau}} \cdot g \cdot (1 - d_{\text{mercure}})}\end{aligned}$$

AN :

$$h = \frac{1,4 \times 10^5 - (2,8 \times 10^5 + 1000 \times 9,807 \times 2)}{1000 \times 9,807 \times (1 - 13,57)} = 1,295 \text{ m}$$

Exercice 6:

En appliquant l'équation de l'hydrostatique entre les points A et C on trouve :

$$P_A - P_C = \rho_{\text{eau}} \cdot g \cdot z \quad (1)$$

En appliquant l'équation de l'hydrostatique entre les points C et E on trouve :

$$P_C - P_E = \rho_{\text{mercure}} \cdot g \cdot (Z_E - Z_C) \Rightarrow P_C - P_E = 0,6 d_{\text{mercure}} \cdot \rho_{\text{eau}} \cdot g \quad (2)$$

En appliquant l'équation de l'hydrostatique entre les points E et B on trouve :

$$P_B - P_E = \rho_{\text{eau}} \cdot g \cdot (Z_E - Z_B) \Rightarrow P_B - P_E = \rho_{\text{eau}} \cdot g \cdot (z - 0,6) \quad (3)$$

$$\begin{aligned}(1) + (2) + (3) &\Rightarrow (P_A - P_C) + (P_C - P_E) - (P_B - P_E) \\ &= (\rho_{\text{eau}} \cdot g \cdot z) + (0,6 d_{\text{mercure}} \cdot \rho_{\text{eau}} \cdot g) - (\rho_{\text{eau}} \cdot g \cdot (z - 0,6)) \\ \Rightarrow P_A - P_B &= \rho_{\text{eau}} \cdot g \cdot z + 0,6 d_{\text{mercure}} \cdot \rho_{\text{eau}} \cdot g - \rho_{\text{eau}} \cdot g \cdot z + 0,6 \rho_{\text{eau}} \cdot g \\ &\Rightarrow P_A - P_B = 0,6 d_{\text{mercure}} \cdot \rho_{\text{eau}} \cdot g + 0,6 \rho_{\text{eau}} \cdot g \\ &\Rightarrow P_A - P_B = 0,6 \rho_{\text{eau}} \cdot g \cdot (d_{\text{mercure}} + 1)\end{aligned}$$

AN :

$$P_A - P_B = 0,6 \times 1000 \times 9,807 \times (13,57 + 1) = 73964,394 \text{ Pa}$$

Exercice 7:

1) Surface AB (surface rectangulaire) :

La résultante des forces est donnée par :

$$F = \rho g d S$$

avec d la distance entre le centre de gravité de S_{AB} et la surface libre.

Le centre de gravité d'un rectangle :

$$h_c = \frac{AB}{2}$$

donc

$$d = \frac{AB}{2} + 4 = \frac{6}{2} + 4 = 7 \text{ m}$$

et

$$S = AB \cdot l = 6 \times 3 = 18 \text{ m}^2$$

donc

$$F = 10^5 \times 9,81 \times 7 \times 18 = 123606000 \text{ N}$$

Le centre de poussée :

$$y_D = y_C + \frac{I_{Cx}}{y_C S}$$

avec

$$I_{Cx} = \frac{l \cdot AB^3}{12} \quad \text{et} \quad y_C = d \text{ (plan vertical)} = 7 \text{ m}$$

donc

$$y_D = 7 + \frac{3 \times 6^3 / 12}{7 \times 18} = 7,43 \text{ m}$$

2) Surface CD (surface triangulaire) :

La résultante des forces est donnée par :

$$F = \rho g d S$$

avec d la distance entre le centre de gravité de S_{CD} et la surface libre.

Le centre de gravité d'un triangle :

$$h_c = \frac{2}{3} CD$$

donc

$$d = \frac{2}{3} CD \sin 45 + 3 = \frac{2}{3} \times 6 \times \sin 45 + 3 = 5,83 \text{ m}$$

et

$$S = \frac{b \cdot AB}{2} = \frac{4 \times 6}{2} = 12 \text{ m}^2$$

donc

$$F = 10^5 \times 9,81 \times 5,83 \times 12 = 68612244,11 \text{ N}$$

Le centre de poussée :

$$y_D = y_C + \frac{I_{Cx}}{y_C S}$$

avec

$$I_{Cx} = \frac{l \cdot CD^3}{36}$$

et

$$y_C = \frac{d}{\sin 45} \text{ (plan incliné)} = \frac{\left(\frac{2 \cdot CD \cdot \sin 45}{3}\right) + 3}{\sin 45} = 8,2426 \text{ m}$$

donc

$$y_D = 8,2426 + \frac{4 \times 6^3 / 36}{8,2426 \times 12} = 8,49 \text{ m}$$

Exercice 8:

La force totale agissant sur ABC vaut $(F_{AB} + F_{BC})$.

1. La force F_{AB} :

$$F_{AB} = \rho g d S_{AB} = (0,8 \times 10^3) \times 9,81 \times \frac{3}{2} \times (3 \times 1,2)$$

donc

$$F_{AB} = 42379,2 \text{ N}$$

D'où

$$F = 58870 \text{ N}$$

Le point d'application de la force F_{AB} :

$$y_{DAB} = y_C + \frac{I_{Cx}}{y_C S_{AB}} \quad \text{avec} \quad I_{Cx} = \frac{l \cdot AB^3}{12}$$

et

$$y_C = d = 1,5 \text{ m}$$

donc

$$y_{DAB} = 1,5 + \frac{1,2 \times 3^3/12}{1,5 \times (3 \times 1,2)} = 2 \text{ m}$$

2. La force F_{BC} :

L'eau agit sur la surface BC et n'importe quel liquide superposé peut être converti en une hauteur d'eau équivalente. Employons un niveau d'eau imaginaire (NEI) pour ce deuxième calcul ; on positionne ce NEI en transformant 3 m d'huile en h' d'eau :

$$P = \rho_{\text{huile}} g AB = \rho_{\text{eau}} g h'$$

alors

$$h' = \frac{\rho_{\text{huile}}}{\rho_{\text{eau}}} AB = D_r \cdot AB = 0,8 \times 3 = 2,4 \text{ m}$$

La force :

$$F_{BC} = \rho_{\text{eau}} g d S_{BC} \quad \text{avec} \quad d = \frac{BC}{2} + h'$$

donc

$$F_{BC} = 10^3 \times 9,81 \times \left(\frac{1,8}{2} + 2,4 \right) \times (1,8 \times 1,2)$$

d'où

$$F_{BC} = 69925,68 \text{ N}$$

Le point d'application de la force F_{BC} :

$$y_{DBC} = y_C + \frac{I_{cx}}{y_C S_{BC}} \quad \text{avec} \quad I_{cx} = \frac{l \cdot BC^3}{12}$$

et

$$y_C = d = \frac{1,8}{2} + 2,4 = 3,3 \text{ m}$$

donc

$$y_{DBC} = 3,3 + \frac{1,2 \times 1,8^3 / 12}{3,3 \times (1,8 \times 1,2)} = 3,38 \text{ m de } O$$

soit

$$0,6 + 3,38 = 3,98 \text{ m de } A$$

3. La force totale résultante :

$$F = F_{AB} + F_{BC} = 42379,2 + 69925,68$$

donc

$$F = 112304,88 \text{ N} = 112,3 \text{ kN}$$

4. Le point d'application de la force totale F :

Le moment de cette force totale est la somme des moments de ses deux composantes. Utilisant A comme axe, par commodité :

$$F \cdot y_D = F_{AB} \cdot y_{DAB} + F_{BC} \cdot y_{DBC}$$

d'où

$$y_D = \frac{F_{AB} \cdot y_{DAB} + F_{BC} \cdot y_{DBC}}{F}$$
$$y_D = \frac{42379,2 \times 2 + 69925,68 \times 3,98}{112304,88}$$

donc

$$y_D = 3,23 \text{ m de } A$$

Exercice 9:

Le point d'équilibre critique est donné lorsque la somme des moments des forces par rapport au point O est nulle :

$$(F \times x) + (F_{\text{gravité}} \times x) - (F_p \times d) = 0$$

Déterminons d'abord la valeur de x et de $F_{\text{gravité}}$:

$$\tan 45^\circ = \frac{0,75}{x} = 1 \implies x = 0,75 \text{ m}$$

De plus,

$$F_{\text{gravité}} = m \times g = 2000 \text{ kg} \times 9,81 \text{ m/s}^2$$
$$F_{\text{gravité}} = 19620 \text{ N}$$

Établissons ensuite les valeurs de la surface et de la profondeur du centre de surface afin de pouvoir calculer la force de pression :

$$\sin 45^\circ = \frac{1,5}{b} = 0,707$$

Où b représente la hauteur de la porte :

$$b = 2,12, \quad S = 2,12 \times 1,20 = 2,54 \text{ m}^2, \quad h_c = 1,50 + 0,75 = 2,25 \text{ m}$$

Alors

$$F_p = \rho \cdot g \cdot h_c \cdot S = 1000 \text{ kg/m}^3 \times 9,81 \text{ m/s}^2 \times 2,25 \text{ m} \times 2,54 \text{ m}^2$$

$$F_p = 56064 \text{ N}$$

Déterminons maintenant le moment d'inertie pour pouvoir calculer y_D :

$$y_D = y_C + \frac{I_{cx}}{y_C S} \quad \text{avec} \quad I_{cx} = \frac{lb^3}{12}$$

et

$$y_C = \frac{h_c}{\sin 45^\circ} = \frac{2,25}{\sin 45^\circ} = 3,18 \text{ m}$$

Donc

$$y_D = 3,18 + \frac{1,2 \times 2,12^3 / 12}{3,18 \times 1,2 \times 2,12} = 3,3 \text{ m}$$

$$d = y - y_D \quad \text{avec} \quad y = \frac{1,5 + 1,5}{\sin 45^\circ} = 4,24 \text{ m}$$

donc

$$d = 4,24 - 3,3 = 0,94 \text{ m}$$

Revenons maintenant à notre équation de départ pour trouver la dernière inconnue, la force F :

$$F = \frac{(F_p \times d) - (F_{\text{gravité}} \times x)}{x} = \frac{(56064 \times 0,94) - (19620 \times 0,75)}{0,75}$$

D'où

$$F = 58\,870 \text{ N}$$