Mastère de Recherche Physique Niv-1 2025-2026
Faculté des sciences Gafsa

TD - 3

Exercice: 1

Dans une boite de volume V, on enferme un gaz parfait de N fermions de spin 1/2.

1. Calculer le potentiel chimique μ_0 et l'énergie totale du système à température nulle en fonction de V et N.
2. Sachant que la chaleur spécifique est de la forme $c_v = \dfrac{AT}{\mu_0}$, où A est une constante, calculer l'énergie totale du système a la température T telle que $kT << \mu$

Exercice: 2

On considère un gaz parfait classique de fermions à trois dimensions.
Montrer que la pression et le volume sont reliés a l'énergie moyenne E par $PV = \dfrac{2}{3}E$

Solution:

Pour résoudre l'intégrale par parties détaillée suivante :

$$J = -kTAV \int_0^\infty \varepsilon^{1/2} \ln\left(1 + e^{-\beta(\varepsilon-\mu)}\right) d\varepsilon$$

on commence en posant

$$u = \ln\left(1 + e^{-\beta(\varepsilon-\mu)}\right)$$
$$dv = \varepsilon^{1/2} d\varepsilon$$

Ensuite, on calcule les différentielles correspondantes :

$$du = \frac{d}{d\varepsilon} \ln\left(1 + e^{-\beta(\varepsilon-\mu)}\right) d\varepsilon = \frac{-\beta e^{-\beta(\varepsilon-\mu)}}{1 + e^{-\beta(\varepsilon-\mu)}} d\varepsilon = -\beta \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1} d\varepsilon$$
$$v = \int \varepsilon^{1/2} d\varepsilon = \frac{2}{3}\varepsilon^{3/2}$$

L'intégration par parties donne :

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

Donc :

$$\int_0^\infty \varepsilon^{1/2} \ln\left(1+e^{-\beta(\varepsilon-\mu)}\right) d\varepsilon = \frac{2}{3}\varepsilon^{3/2} \ln\left(1+e^{-\beta(\varepsilon-\mu)}\right)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{2}{3}\varepsilon^{3/2} \left(-\beta \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}+1}\right) d\varepsilon$$

Le premier terme de bord disparaît car pour

$$\varepsilon \to \infty$$

$$\ln\left(1+e^{-\beta(\varepsilon-\mu)}\right) \to 0$$

et pour

$$\varepsilon = 0$$

$$\varepsilon^{3/2} = 0$$

Il reste :

$$= \frac{2\beta}{3} \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{3/2}}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}+1} d\varepsilon$$

Ainsi, l'intégrale initiale devient une intégrale de la forme d'une distribution de Fermi-Dirac pour $\varepsilon^{3/2}$. Cette forme est connue en physique statistique et correspond à une intégrale pour les fermions à température T Le résultat peut être exprimé avec la fonction polylogarithme ou en termes de fonctions spéciales appelées fonctions de Fermi.

En résumé, l'intégrale par parties transforme l'expression en :

$$J = -kTAV \cdot \frac{2\beta}{3} \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{3/2}}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}+1} d\varepsilon$$

où l'intégrale est une intégrale standard en statistique quantique.

E et J sont lineaires en V. On en deduit:

$$P = \frac{2}{3}\frac{E}{V}$$

$$PV = \frac{2}{3}E$$