

Chapitre 2

Statique des fluides

F.S.Gafsa

Objectifs

Au terme de ce chapitre, l'étudiant doit être capable :

- Démontrer la relation de l'hydrostatique ;
- Calculer la pression en tout point d'un fluide immobile ;
- Calculer les efforts exercés par un fluide au repos sur une surface indéformable ;
- Déterminer le point application de la résultante des efforts exercés.

Dans ce chapitre, on étudie l'hydrostatique (la statique des fluides) qui s'occupe des conditions d'équilibre des fluides au repos et l'interaction des fluides avec les surfaces et les corps solides immergés, on notera que les forces de frottement qui sont dues essentiellement à la viscosité ne se manifestent pas (pas d'écoulement) et l'étude reste valable pour les fluides réels.

2.1 Notion sur les pressions

2.1.1 Définition de la pression

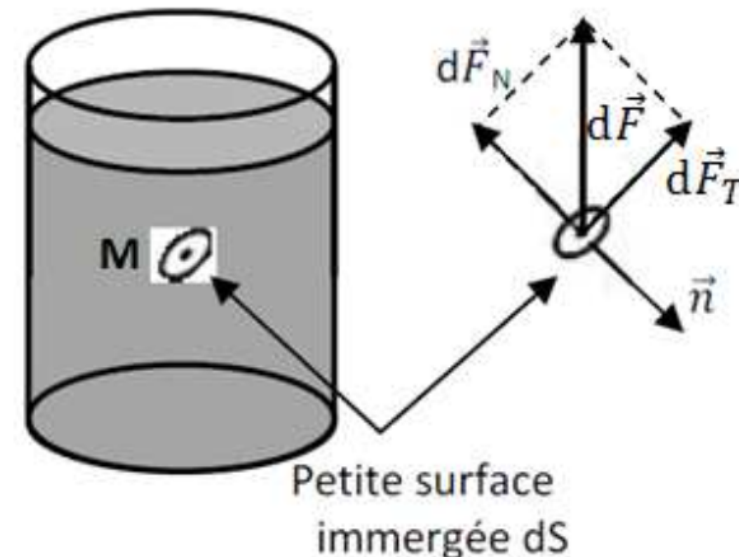
La pression est une grandeur scalaire, elle désigne la composante normale de la force par unité de surface qu'exerce le fluide sur un élément de surface dS .

Soit un système fluide, c'est-à-dire un volume délimité par une surface fermée S .

Considérons $d\vec{F}$ la force d'interaction au niveau de la surface élémentaire dS .

On peut toujours décomposer $d\vec{F}$ en deux composantes:

- une composante $d\vec{F}_T$ tangentielle à dS ;
- une composante $d\vec{F}_N$ normale à dS .



La force tangentielle $d\vec{F}_T$ n'apparaît qu'en dynamique des fluides visqueux : Elle correspond aux frottements visqueux des couches fluides en mouvement les unes par rapport aux autres et par rapport à la paroi de la conduite.

La force normale $d\vec{F}_N$ est la force de pression élémentaire, elle s'exprime par :

$$d\vec{F}_N = -P \cdot dS \cdot \vec{n}$$

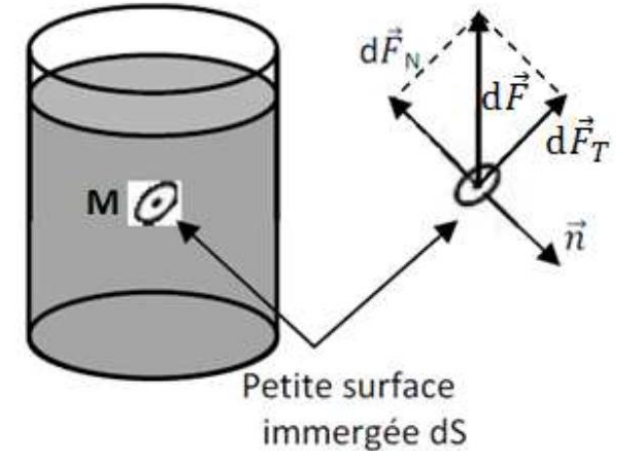
Avec; dS : Élément de surface

\vec{n} : Vecteur unitaire en M de la norme extérieur à la surface.

$d\vec{F}_N$: Composante normale de la force élémentaire exercée sur l'élément de surface dS .

P : La pression en M (Pascal).

D'où la pression est donnée par l'expression suivante : $P = \frac{\|d\vec{F}_N\|}{dS}$



2.1.2 Unité pression

Dans le système international (SI), une pression s'exprime en Newton par mètre carré (N/m^2), également appelé Pascal (Pa). Cette unité est la seule qui a une valeur légale, et la seule utilisée avec rigueur par la communauté scientifique.

Autres unités de pression :

On rencontre aussi des unités de pression anciennes (mais encore utilisées parfois), ou d'usage particulier à certaines disciplines :

- Le bar, vaut $10^5 \text{ Pa} = 100 \text{ kPa}$
- L'atmosphère (atm), vaut environ 1 bar : $1 \text{ atm} = 1.01325 \text{ bar} = 101.325 \text{ kPa}$
- Le mètre de colonne d'eau (mCE), égal à la pression qui règne sous un mètre d'eau sous gravité terrestre, vaut 9810 Pa
- Le millimètre de mercure (mmHg), vaut 133 Pa

2.1.3 Pression absolue et pression relative

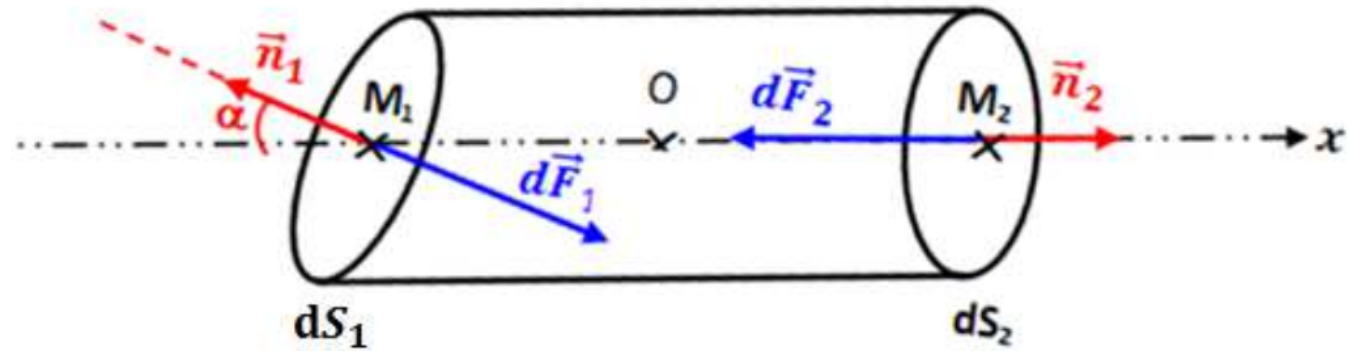
- La pression absolue est la pression réelle mesurée par rapport au vide absolu (c'est-à-dire l'absence totale de matière). Elle est toujours positive.
- La pression relative se définit par rapport à la pression atmosphérique existant au moment de la mesure: cette pression peut donc prendre une valeur positive si la pression est supérieure à la pression atmosphérique ou une valeur négative si la pression est inférieure à la pression atmosphérique.

$$P_{relative} = P_{absolue} - P_{atmosphérique}$$

2.1.4 Pression en un point d'un fluide

Dans un fluide en équilibre la pression est indépendante de la direction, pour montrer cela, on prend un élément du liquide à une profondeur quelconque d'un réservoir plein de liquide ouvert à l'atmosphère.

Considérons un volume de fluide élémentaire de forme cylindrique. L'élément de fluide se trouve dans un fluide au repos (à l'équilibre). Le cylindre de fluide est centré sur l'axe Ox . Une seule de ses bases est orthogonale à l'axe Ox , l'autre fait un angle, avec l'axe (l'orientation de la surface est repérée grâce à la normale).



Le bilan des forces extérieures appliquées sur l'élément de fluide cylindrique est :

- Poids de l'élément fluide ;
- Forces de pression sur la paroi latérale de cylindre ;

Ces deux forces existent mais sont orthogonales à Ox donc leur projection est égale à 0. On ne les compte pas.

- Forces de pression sur les surfaces dS_1 et dS_2 :

$$d\vec{F}_1 = -P_1 \cdot dS_1 \cdot \vec{n}_1$$

$$d\vec{F}_2 = -P_2 \cdot dS_2 \cdot \vec{n}_2$$

Appliquons le principe fondamental de la statique ($\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$) à l'élément fluide cylindrique, en projection sur l'axe Ox , on obtient :

$$\|d\vec{F}_1\| \cos\alpha - \|d\vec{F}_2\| = 0 \quad (\text{projection sur l'axe}(Ox))$$

$$P_1 \cdot dS_1 \cdot \cos\alpha - P_2 \cdot dS_2 = 0$$

Comme les surfaces dS_1 et dS_2 sont liées par : $dS_1 \cdot \cos\alpha = dS_2$

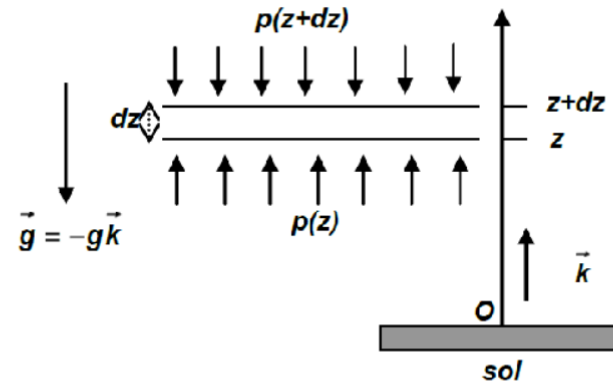
On en déduit alors : $P_1 = P_2$.

On conclure que :

- La pression P exercée sur une surface est indépendante de l'orientation de la surface considérée.
- La pression est la même en tout point d'un même plan horizontal d'un fluide en équilibre (surface isobare).

2.2 Loi fondamentale de statique des fluides

Dans le champ de pesanteur, on considère une tranche de fluide mince à l'altitude z , d'épaisseur dz et de section unité S en équilibre dans un référentiel R lié au sol supposé galiléen. L'axe des z est vertical ascendant.



L'équilibre de cette tranche est obtenu en faisant le bilan des forces extérieures exercées sur cette tranche :

- Les forces de surface, la pression agit sur la face supérieure et inférieure de l'élément.

Ces forces s'écrivent de la façon suivante :

- Force de pression sur la surface inférieure :

$$\vec{F}(z) = P(z).S.\vec{k}$$

- Force de pression sur la surface supérieure :

$$\vec{F}(z + dz) = -P(z + dz).S.\vec{k}$$

- Les forces de viscosité et de turbulence n'existent pas puisqu'il n'y a pas de vitesse relative entre les particules de fluide.

- Les forces de volume : il n'en existe qu'une seule la force de pesanteur. Elle s'écrit de la façon suivante : $\vec{F} = -m \cdot g \cdot \vec{k} = -\rho \cdot g \cdot S \cdot dz \cdot \vec{k}$

Les forces d'inertie n'existent pas puisque le fluide est au repos (vitesse nulle).

L'écriture du principe fondamental de la dynamique conduit à :

$$P(z + dz) - P(z) + \rho \cdot g \cdot dz = 0$$

Si on pose : $P(z + dz) - P(z) = dP$, On en déduit que :

$$dP = -\rho \cdot g \cdot dz$$

Pour obtenir la différence de pression entre deux points M_1 à la hauteur Z_1 et M_2 à la hauteur Z_2 , il suffit d'intégrer l'équation fondamentale de la statique des fluides :

$$\int_1^2 dP = -\rho \cdot g \cdot \int_1^2 dz$$

On obtient :

$$P_2 - P_1 = \rho \cdot g \cdot (z_1 - z_2)$$

Ou bien :

$$\frac{P_2}{\rho \cdot g} + z_2 = \frac{P_1}{\rho \cdot g} + z_1$$

Conclusion :

Pour tout point i quelconque, dans un liquide au repos, définie par son altitude Z_i par à rapport à un plan de référence, on a :
$$\frac{P_i}{\rho \cdot g} + z_i = C^{ste}$$

C'est la relation fondamentale de la statique des fluides. Elle est encore appelée le principe de l'hydrostatique.

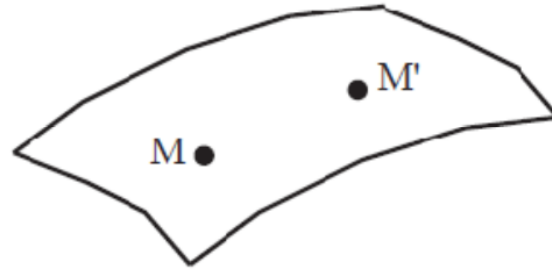
NB : L'équation générale de l'hydrostatique peut s'écrire en pression absolue ou en pression effective si P_1 est effective alors P_2 est effective, si P_1 est absolue alors P_2 est absolue.

2.2.1 Conséquences et applications du principe de l'hydrostatique

Comme conséquences immédiates de cette équation, on tire les propositions suivantes:

2.2.1.1 Surface de niveau : surface isobare

Une surface isobare est telle que la pression soit identique en chacun de ses points. Considérons deux points M et M' très voisins dans un même fluide, et soit $dP_{M \rightarrow M'}$ la variation de pression quand on va de M à M' . Cette variation de pression est très petite car les deux points sont très voisins.



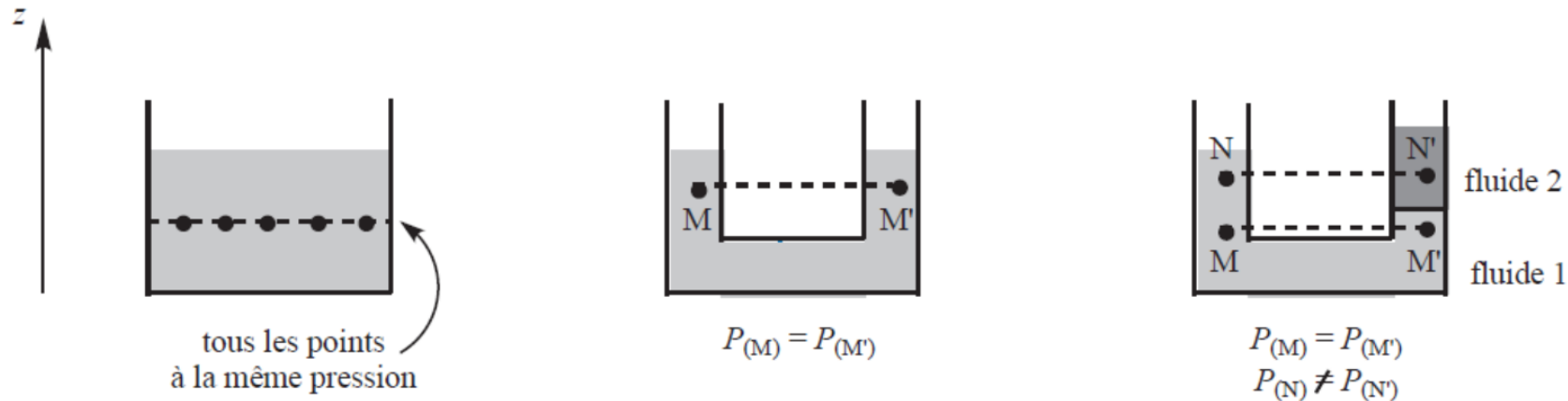
Si M et M' sont sur une surface isobare, alors la variation de pression quand on va de l'un à l'autre est nulle par définition. Dans le cas d'un fluide au repos dans le seul champ de pesanteur, l'équation locale de la statique des fluides implique alors :

$$dP_{M \rightarrow M'} = 0 \Rightarrow \rho \cdot g \cdot dz_{M \rightarrow M'} = 0 \Rightarrow dz_{M \rightarrow M'} = 0$$

Si M et M' sont sur une surface isobare, alors la variation de pression quand on va de l'un à l'autre est nulle par définition. Dans le cas d'un fluide au repos dans le seul champ de pesanteur, l'équation locale de la statique des fluides implique alors :

$$dP_{M \rightarrow M'} = 0 \Rightarrow \rho \cdot g \cdot dz_{M \rightarrow M'} = 0 \Rightarrow dz_{M \rightarrow M'} = 0$$

Ce qui revient à dire que M et M' sont à la même altitude. Dans un fluide au repos dans le seul champ de pesanteur, les surfaces isobares sont des plans horizontaux. En d'autres termes, en deux points à la même altitude dans un même fluide, la pression est la même ; c'est le cas des points sur une horizontale dans les dispositifs à gauche et au centre ci-dessous.



Dans le dispositif à droite, qui comporte deux liquides différents, il y a égalité des pressions sur une horizontale au sein d'un même fluide ($P_{(M)} = P_{(M')}$), mais pas dans deux fluides différents ($P_{(N)} \neq P_{(N')}$).

2.2.1.2 Pression pour des fluides non miscibles superposés

On considère deux fluides (I) et (II) non miscibles (ex. eau et huile), de masse volumique ρ_1 et ρ_2 , dans un même récipient et soient deux points A et B de la surface de séparation supposée (par l'absurde) non horizontale :

$$\left. \begin{array}{l} \text{dans le fluide I, } P_B - P_A = \rho_1 \cdot g \cdot h \\ \text{dans le fluide II, } P_B - P_A = \rho_2 \cdot g \cdot h \end{array} \right\} \Rightarrow \rho_1 \cdot g \cdot h = \rho_2 \cdot g \cdot h$$

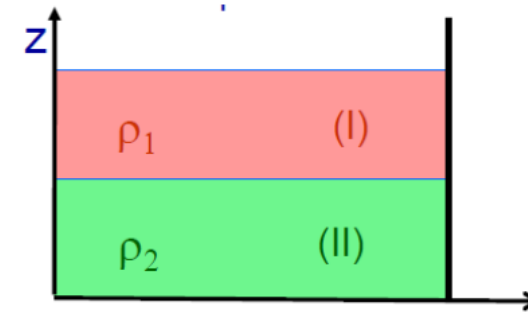
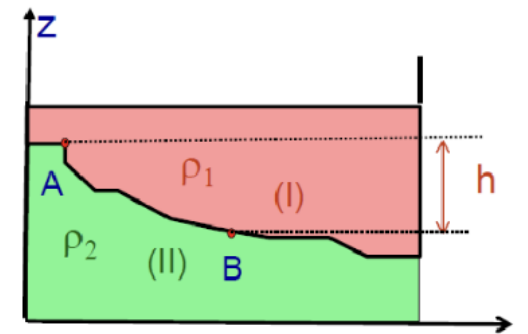
$$\Rightarrow g \cdot h \cdot (\rho_1 - \rho_2) = 0$$

Or $g \neq 0$ et $(\rho_1 - \rho_2) \neq 0$ donc : $h = 0$

Conclusion (puisque $h=0$) :

La surface de séparation de deux liquides non miscibles au repos est horizontale. Et puisque $\rho_1 - \rho_2 > 0 \Rightarrow \rho_1 > \rho_2$

Et par la suite le fluide (II) le plus lourd est en dessous.



2.2.2 Instruments de mesure de la pression

2.2.2.1 Baromètre de Torricelli (Manomètre à mercure)

Le baromètre ne sert qu'à mesurer la pression atmosphérique. Le premier baromètre a été inventé par l'italien Evangelista Torricelli en 1644. Il remplit de mercure un tube de verre d'un mètre de long, ferme à une extrémité. Il le retourne et le plonge dans une cuvette remplie de mercure. Il constate alors que le niveau de mercure dans le tube s'abaisse, laissant un espace de vide au-dessus de lui. Il vient de découvrir la pression atmosphérique.

La P_{atm} est obtenue en mesurant la hauteur h de Hg : $h = 76 \text{ cm}$

Principe de la statique entre A et B :

$$P_A + \rho_m g z_A = P_B + \rho_m g z_B \Rightarrow P_{atm} = P_{vide} + \rho_m g (z_A - z_B)$$

$$\Rightarrow P_{atm} = P_{vide} + \rho_m g h$$

$$\Rightarrow P_{atm} = 0 + 13600 * 9.8 * 0.76$$

$$\Rightarrow P_{atm} = 101292 \text{ Pa}$$

Au niveau de la mer : $P_{atm} = 1 \text{ atm} = 1,0133.105 \text{ Pa}$, soit 762 mm de Hg.

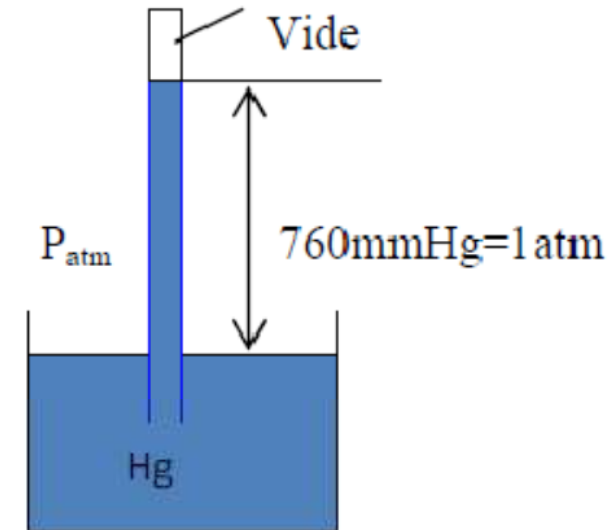


Fig. 12 : Baromètre

2.2.2.2 Le tube manométrique simple ou piézomètre

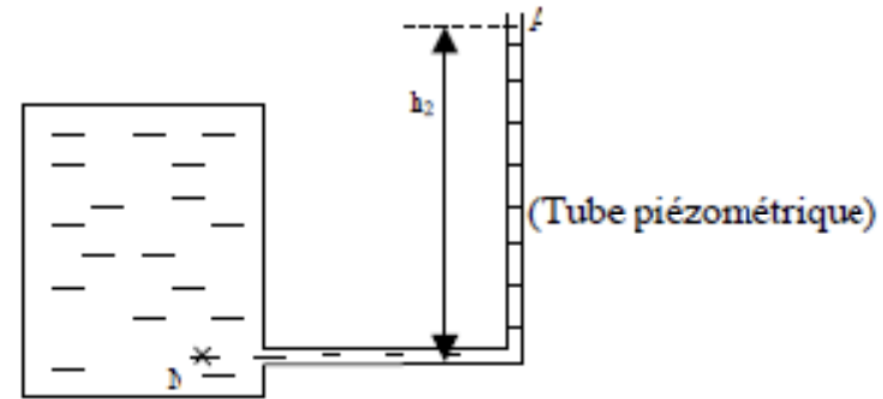
Le piézomètre est l'instrument de mesure de la pression le plus simple, c'est un tube raccorde au point où on veut déterminer la pression. C'est un dispositif utilise uniquement pour la mesure des pressions des Liquides et non les gaz.

Soit B un point d'un liquide en équilibre dont on veut mesurer la pression.

La pression en B est donnée par :

$$P_B = P_A + \rho g h_2$$

P_A et P_B sont appelées « Pressions Manométriques » et h_2 est appelé « Hauteur Manométrique ».



2.2.2.3 Le tube manométrique en forme de « U »

Il s'agit d'un dispositif utilise pour la mesure des pressions dans les liquides et les gaz.

Soit un réservoir contenant un liquide (1) de masse volumique ρ_l , un tube en U est relié à celui-ci contenant un liquide (2) (appelé liquide manométrique) de masse volumique ρ_m .

Déterminer la pression effective en A ?

Principe de la statique entre A et B :

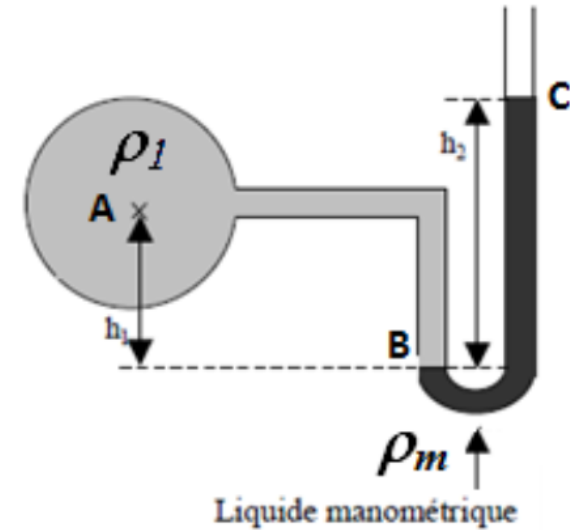
$$P_A + \rho_1 g z_A = P_B + \rho_1 g z_B \Rightarrow P_A = P_B - \rho_1 g h_1$$

Principe de la statique entre B et C :

$$P_B + \rho_m g z_B = P_C + \rho_m g z_C \Rightarrow P_B = P_C + \rho_m g h_2$$

$$\text{et } P_C = P_{atm} \Rightarrow P_A = P_{atm} + \rho_m g h_2 - \rho_1 g h_1$$

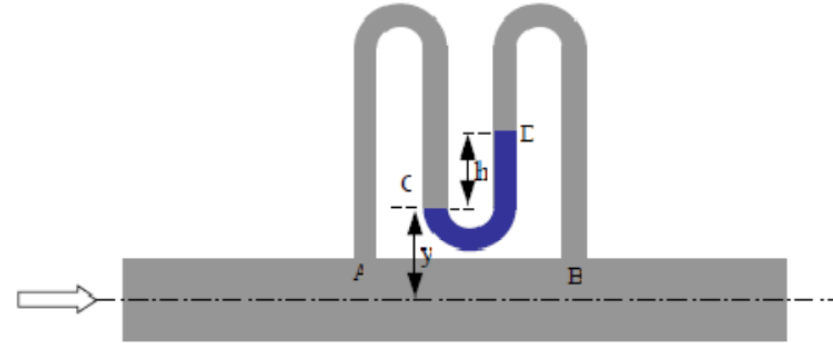
Si le fluide (1) est un gaz, sa densité est négligeable devant celle du liquide manométrique.



2.2.2.4 Le manomètre différentiel

C'est un tube raccorde entre deux point ou en veut déterminer la différence de pression ou hauteur piézométrique, il peut être à un seul liquide avec valve d'entrer d'air, ou a deux liquides.

Exemple : Un manomètre différentiel est fixé entre deux sections A et B d'un tuyau horizontal où s'écoule de l'eau. La dénivellation du mercure dans le manomètre est h , le niveau le plus proche de A étant le plus bas.



Déterminer la différence de pression entre les sections A et B ?

Principe de la statique entre A et C :

$$P_A + \rho g z_A = P_C + \rho g z_C \Rightarrow P_A = P_C + \rho g y$$

Principe de la statique entre C et D :

$$P_C + \rho_m g z_C = P_D + \rho_m g z_D \Rightarrow P_C = P_D + \rho_m g h$$

Principe de la statique entre D et B :

$$P_D + \rho g z_D = P_B + \rho g z_B \Rightarrow P_D = P_B - \rho g (h+y)$$

$$\text{Donc : } P_A - P_B = g h (\rho_m - \rho)$$

2.3 Théorème de Pascal : transmission de pression

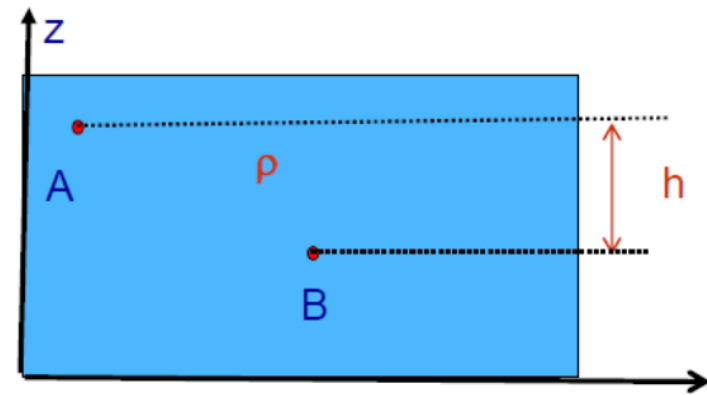
Le théorème de Pascal s'énonce comme suit : dans un fluide incompressible en équilibre, toute variation de pression en un point entraîne la même variation de pression en tout autre point. Cette loi a des applications extrêmement importantes en hydraulique.

Soient deux points A et B (fixes) du fluide, fluide incompressible: On a $P_B - P_A = \rho \cdot g \cdot h$
Et puisque g est considérée constante, donc la différence de pression ne dépend que de la différence d'altitude (h), qui demeure constante, donc : toute variation de pression en A se transmet en B .

Si : A subit une variation de pression dP : $P_A \rightarrow P_A + dP$

Donc, B subit la même variance de pression : $P_B \rightarrow P_B + dP$

Exemples d'applications: Vérin hydraulique, Frein de voiture,



2.3.1 Application : Vérin hydraulique

Un vérin hydraulique est basé sur le fait qu'un liquide au repos transmet intégralement la pression et pas les forces.

Cette figure montre un vérin rempli d'huile fermé par deux bouchons étanches de surface S_A et S_B .

$$\text{On a: } P + \rho \cdot g \cdot z = C^{ste}$$

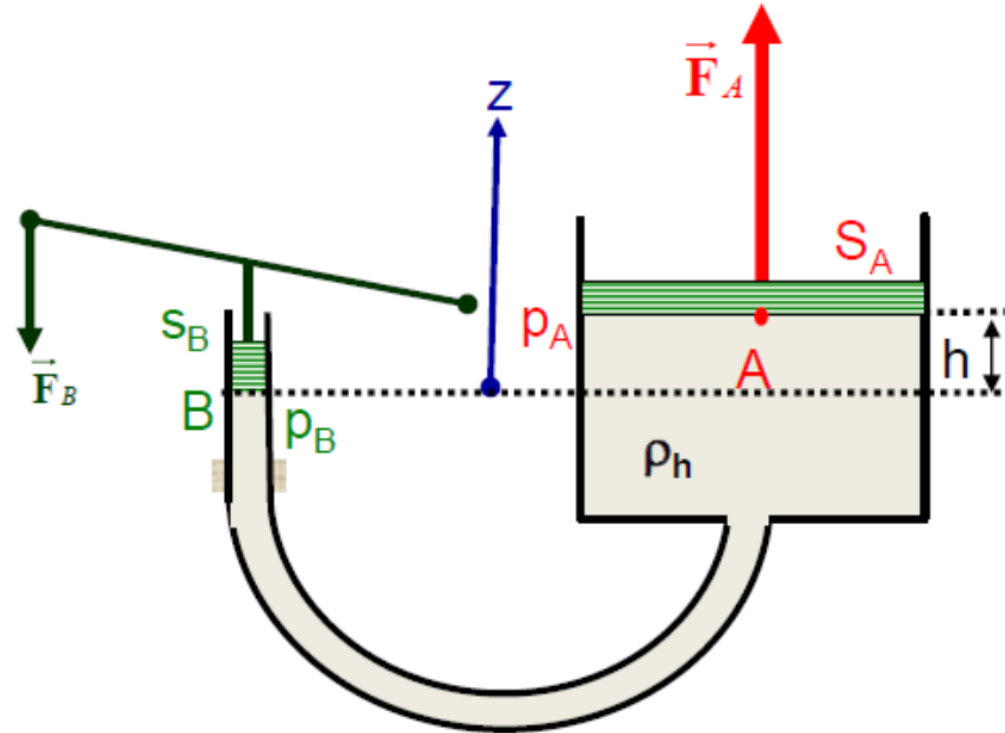
On peut définir les variables :

$$\text{Entre } A \text{ et } B : P_B = P_A + \rho_h \cdot g \cdot h$$

Comme les pressions en A et B ($P_A = P_B$) sont proches (car h est supposé petit), on a : $F_A = P_A \cdot S_A$ et $F_B = P_B \cdot S_B$

Et puisque: $S_A \gg S_B$ alors $F_A \gg F_B$

La presse multiplie la force F_1 par S_2/S_1 . On obtient ainsi une très forte force. Avec un tel vérin un mécanicien peut soulever à la main une voiture ou un avion pour changer une roue de secours.



Remarque :

Par contre avec un tel système les travaux sont égaux en effet :

$$W_{F_2} = F_2 \cdot \Delta L_2 = P_2 \cdot S_2 \cdot \Delta L_2 \text{ et } W_{F_1} = F_1 \cdot \Delta L_1 = P_1 \cdot S_1 \cdot \Delta L_1$$

Fluide incompressible, donc : $S_2 \cdot \Delta L_2 = S_1 \cdot \Delta L_1$ et puisque : $P_1 = P_2$

On donc : $W_{F_2} = W_{F_1}$. La presse ne multiplie pas l'énergie.

2.4 Forces s'exerçant sur une surface immergée (forces hydrostatiques)

La poussée hydrostatique sur une paroi provient des forces de pressions du fluide agissant sur cette surface.

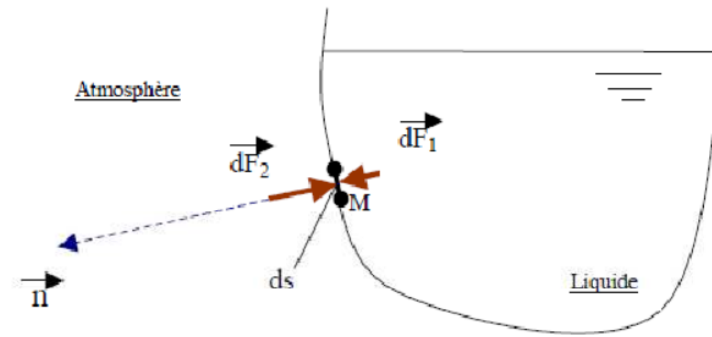
La caractérisation de la pression du fluide sur la surface dépend de:

- Force de poussée hydrostatique (\vec{F}): Les forces élémentaires dF , exercées sur la paroi, sont toutes parallèles et admettent donc une résultante \vec{F} normale à la paroi.
- Centre de poussée (D) : C'est le point d'application de la résultante de la force de poussée \vec{F} sur la surface de contact S .
- Le barycentre (C) : C'est le centre de gravité de la surface immergée de la paroi.

2.4.1 Force de pression élémentaire sur une paroi

Soit un élément de surface dS , centré sur le point M , à la profondeur z au-dessous de la surface libre d'un liquide (incompressible) et \vec{n} la normale sortante de la paroi. On note P_0 la pression atmosphérique.

L'élément de surface est soumis aux deux forces élémentaires $d\vec{F}_1$ (action du liquide sur la paroi) et $d\vec{F}_2$ (action de l'extérieur sur la paroi). Les deux forces sont normales à dS .



- Expression de la pression au point M :

$$\Delta P = -\rho \cdot g \cdot \Delta Z \Rightarrow P_M - P_A = \rho \cdot g \cdot (Z_A - Z_M)$$

$$\Rightarrow P_M = P_0 + \rho \cdot g \cdot z \text{ avec } P_A = P_0$$

- Expression de la résultante des forces de pression sur dS :

- bilan des forces appliquées sur dS :

1)- force pression exercée par le liquide sur dS :

$$d\vec{F}_1 = P_M \cdot d\vec{S} = (P_0 + \rho \cdot g \cdot z) \cdot d\vec{S} = (P_0 + \rho \cdot g \cdot z) \cdot dS \cdot \vec{n}$$

2)- force de pression exercée par l'extérieur sur dS :

$$d\vec{F}_2 = -P_0 \cdot d\vec{S} = -P_0 \cdot dS \cdot \vec{n}$$

- résultante des forces de pression élémentaires exercées sur dS :

$$d\vec{F}_{paroi} = d\vec{F}_1 + d\vec{F}_2 \Rightarrow d\vec{F}_{paroi} = \rho \cdot g \cdot z \cdot dS \cdot \vec{n}$$

$$\Rightarrow d\vec{F}_{paroi} = P \cdot dS \cdot \vec{n} \text{ (uniquement l'action du liquide)}$$

La résultante des forces de pression ne tient compte que de l'action du liquide.

2.4.2 Forces de pression sur une plaque plane horizontale

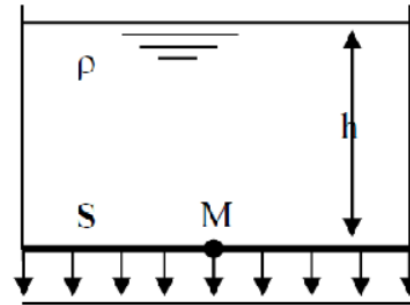
Considérons un réservoir ouvert à l'air libre de sa surface supérieure, de surface de base S , contenant une hauteur h de liquide de masse volumique ρ .

Sur une surface horizontale, la pression est uniforme sur toute la surface $P = \rho \cdot g \cdot h$, alors :

$$F = \int P \cdot dS \Rightarrow P = \int (\rho \cdot g \cdot h) \cdot dS$$

$$\Rightarrow P = \rho \cdot g \cdot h \cdot \int dS$$

D'où : $P = \rho \cdot g \cdot h \cdot S$



La force de pression appliquée sur une paroi horizontale, est égale au poids d'une colonne liquide verticale.

2.4.3 Forces de pression sur une plaque plane verticale

La force de pression en un point M quelconque de la surface verticale S d'épaisseur L est :

$$F = \int dF = \int P. dS$$

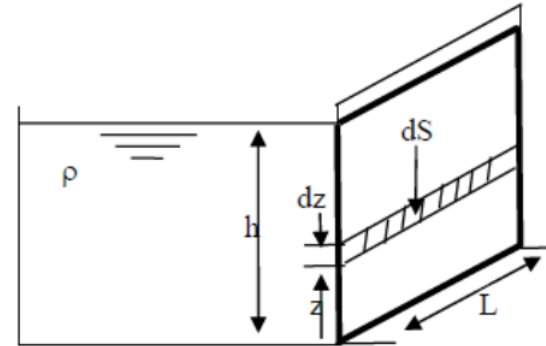
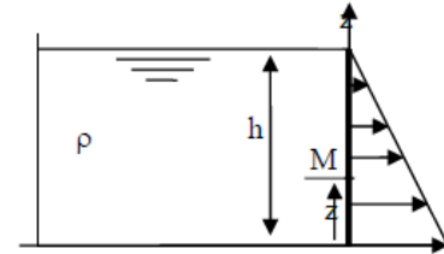
Où $dF = \rho. g. z. dS$ et $dS = L. dz$

Alors ; $F = \int_0^h \rho. g. z. L. dz \Rightarrow F = \rho. g. L \int_0^h z. dz$

$$\Rightarrow F = \rho. g. L. \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^h$$

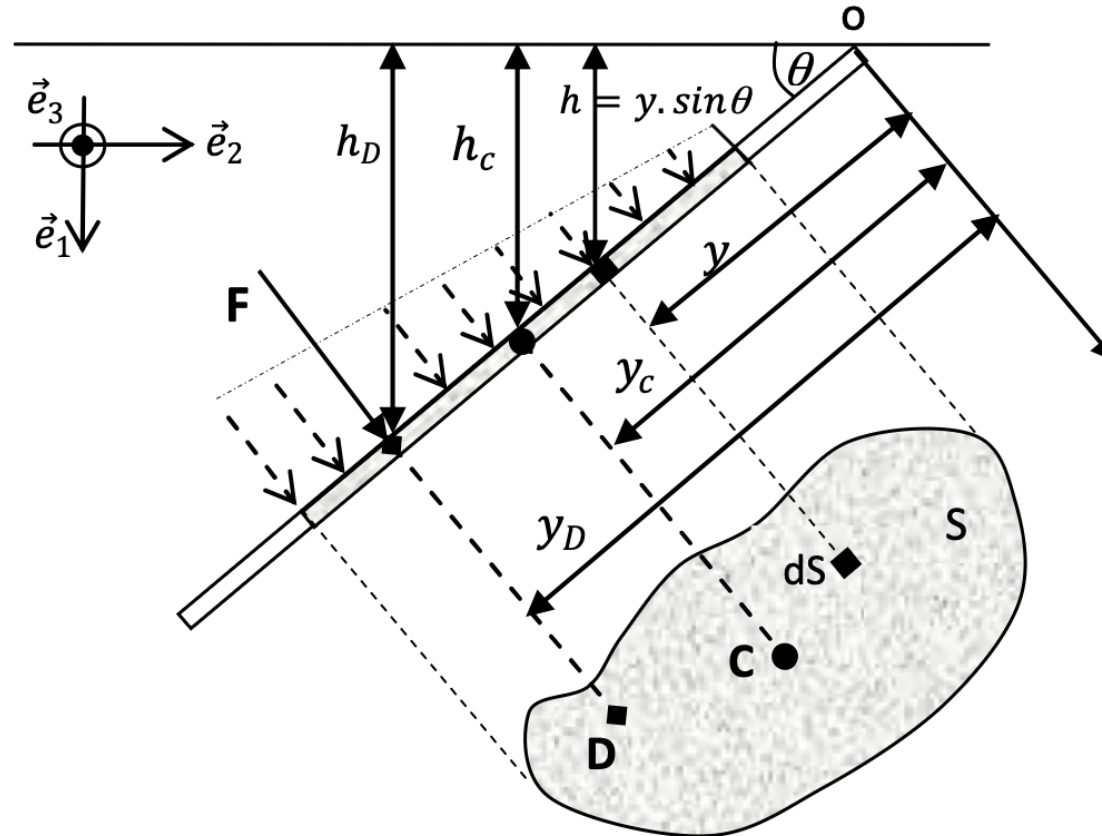
D'où : $F = \rho. g. L. \frac{h^2}{2}$ et $S = L. h$

Donc : $F = \rho. g. S. \frac{h}{2}$



2.4.4 Forces de pression sur une plaque plane oblique

Soit une paroi AB de surface S plane de forme quelconque immergée dans un liquide ρ et inclinée d'un angle θ par rapport à l'horizontale et C son barycentre.



Considérons la force élémentaire dF s'exerçant sur une surface élémentaire dS :

$$dF = P \cdot dS = \rho \cdot g \cdot h \cdot dS = \rho \cdot g \cdot y \cdot \sin\theta \cdot dS$$

D'où $h = y \cdot \sin\theta$

$F = \int dF$ sur toute la surface AB , on obtient :

$$F = \int_S P. dS = \int_S \rho. g. y. \sin\theta. dS = \rho. g. \sin\theta. \int_S y. dS$$

Le terme $\int_S y. dS$ représente le Moment Statique de la surface AB par rapport à Ox , qui est

défini comme suit : $\int_S y. dS = y_c. S$

avec y_c : Ordonnée du barycentre de la surface AB .

L'expression de F devient : $F = \rho. g. y_c. \sin\theta. S$

2.4.5 Cas général (formule pratique)

En général, la résultante des forces de pression sur une surface plane s'écrit :

$$F = \rho \cdot g \cdot d \cdot S$$

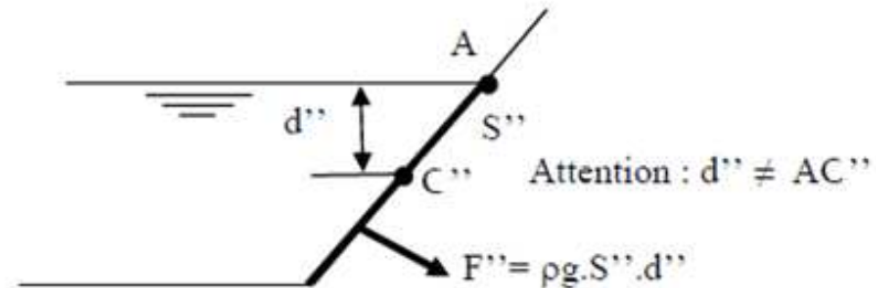
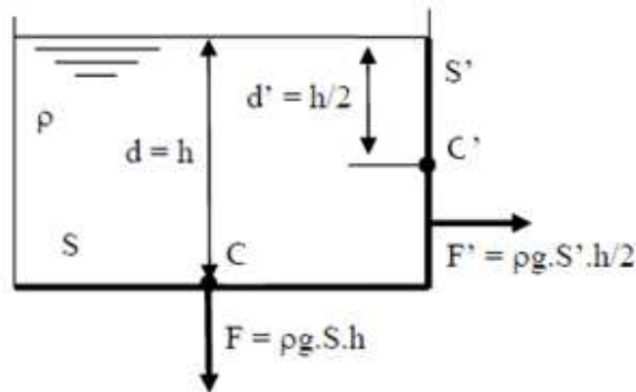
Avec :

S : Surface mouillée considérée (en contact avec le liquide).

d : distance entre le centre de gravité de S et la surface libre.

D : le point d'application de la résultante de la force de poussée F sur la surface de contact S :

- Pour une paroi horizontale : $d = h$
- Pour une paroi verticale : $d' = h/2$
- Pour une paroi *Inclinée* : $d'' = y_C \cdot \sin\theta$



Donc, la force de pression sur une surface plane est égale au produit de la surface immergée par la pression qui subit son barycentre.

2.4.6 Centre de poussée

Le centre de poussée est le point d'application de la résultante de la force de poussée \vec{F} sur la surface de contact S . Il se détermine par le calcul du moment de la force F par rapport a un point O quelconque.

Choisissons le au niveau de la surface libre du fluide, OD est défini par :

$$\vec{OD} \wedge \vec{F} = \int_S \vec{OM} \wedge d\vec{F}$$

ou: M est le point qui balaye toute la surface S_{AB} .

$$F = \rho \cdot g \cdot h \cdot S = \rho \cdot g \cdot y_c \cdot \sin\theta \cdot S; OM = y_c; dF = \rho \cdot g \cdot y_c \cdot \sin\theta \cdot dS; OD = y_D$$

$$\overrightarrow{OD} \wedge \vec{F} = \int_S \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{dF} \Rightarrow \rho \cdot g \cdot \sin\theta \cdot y_c \cdot S \cdot y_D \cdot \underbrace{\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2}_{\vec{e}_3} = \rho \cdot g \cdot \sin\theta \cdot \int_S y_c^2 \cdot dS \cdot \underbrace{\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2}_{\vec{e}_3}$$

$$\Rightarrow y_D = \frac{\int_S y_c^2 \cdot dS}{y_c \cdot S}$$

Le terme $\int_S y_c^2 \cdot dS$ représente le Moment d'inertie de la surface AB par rapport à Ox , qui est défini comme suit : $\int_S y_c^2 \cdot dS = I_{Ox}$

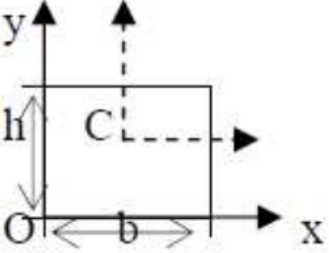
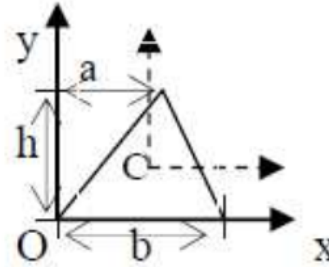
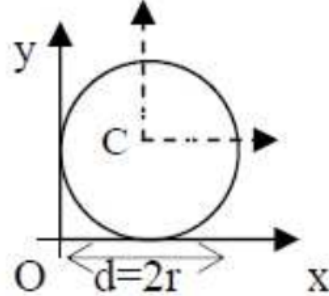
ou : I_{Ox} est le moment d'inertie de la surface AB par rapport l'axe Ox .

Pour les calculs, on remplace le I_{Ox} par le I_{cx} (I_{cx} est le moment d'inertie de la surface AB par rapport à un axe passant par son barycentre C : Connue pour des formes géométriques particulières), à cet effet, on utilise le théorème de Huygens dans la mécanique théorique, ce théorème nous permet d'écrire que : $I_{Ox} = I_{cx} + y_c^2 \cdot S$

Dans ce cas, on aura donc : $y_D = y_c + \frac{I_{cx}}{y_c \cdot S}$ ou $y_D \cdot \sin\theta = h_D$

Le centre de poussée de la résultante F se trouve toujours plus bas que le barycentre.

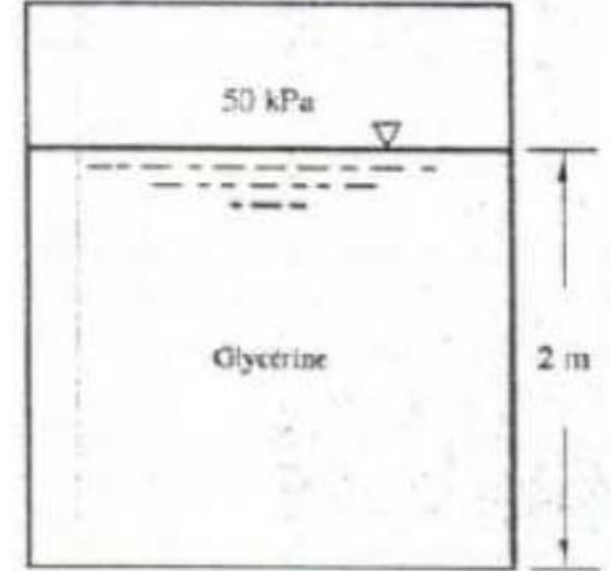
Le tableau suivant résume les moments d'inertie de quelques surfaces particulières :

Forme	$S, x_c, y_c, I_{ox}, I_{cx}$
	$S = h \cdot b, x_c = b/2, y_c = h/2$ $I_{ox} = b \cdot h^3/3, I_{cx} = b \cdot h^3/12$
	$S = h \cdot b / 2, x_c = (a + b)/3, y_c = h/3$ $I_{ox} = b \cdot h^3/12, I_{cx} = b \cdot h^3/36$
	$S = \pi \cdot r^2, x_c = r, y_c = r$ $I_{ox} = 5\pi \cdot r^4/4, I_{cx} = \pi \cdot r^4/4$

Exemples

Exercice

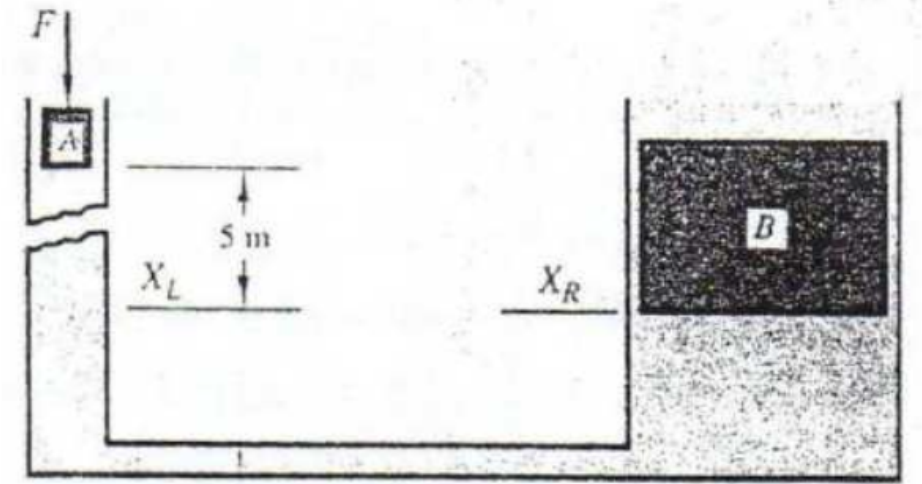
Trouver la pression au fond d'un réservoir contenant de la glycérine sous pression. La densité de la glycérine est 1,262.



Exercice 03 :

Dans la ci-contre, les surfaces des cylindres A et B sont respectivement de 40 et 4000 cm^2 et B a une masse de 4000 kg . Le récipient et les conduites sont remplis d'huile de densité $d = 0,75$.

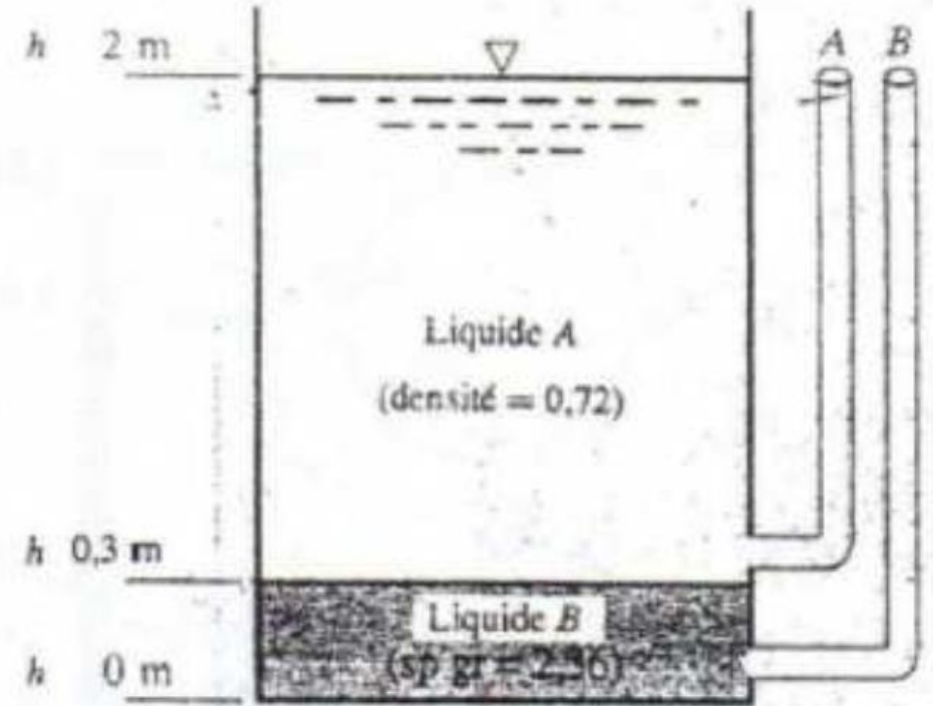
En négligeant le poids du cylindre A , déterminer la force F qui assurera l'équilibre.



Exercice 04 :

La figure ci-contre représente un réservoir ouvert, équipé de deux tubes piézométriques et rempli avec deux liquides non miscibles A et B de densité de $0,72$ et $2,36$ respectivement.

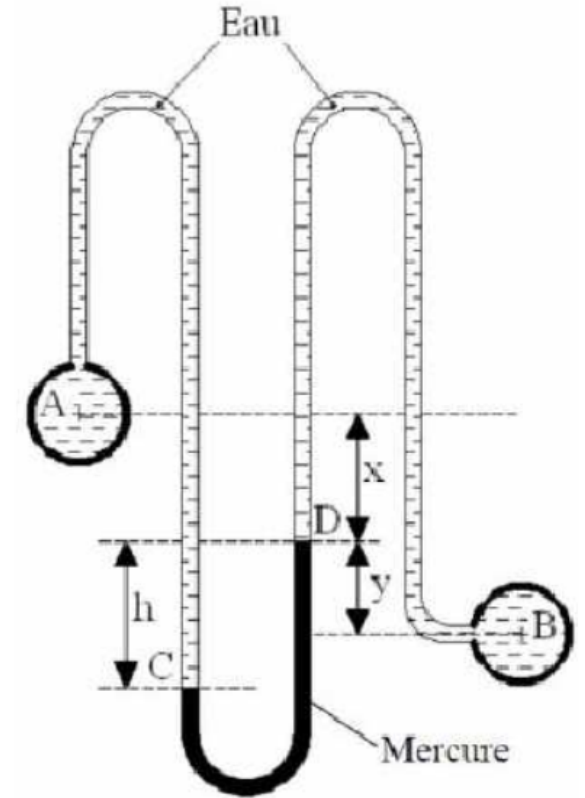
Trouver : La hauteur de la surface liquide dans piézomètre A , la hauteur de la surface liquide dans piézomètre B et la pression totale dans le fond du réservoir.



Exercice 05 :

Les récipients *A* et *B* contiennent de l'eau aux pressions respectives de 2,80 et 1,40 bar.

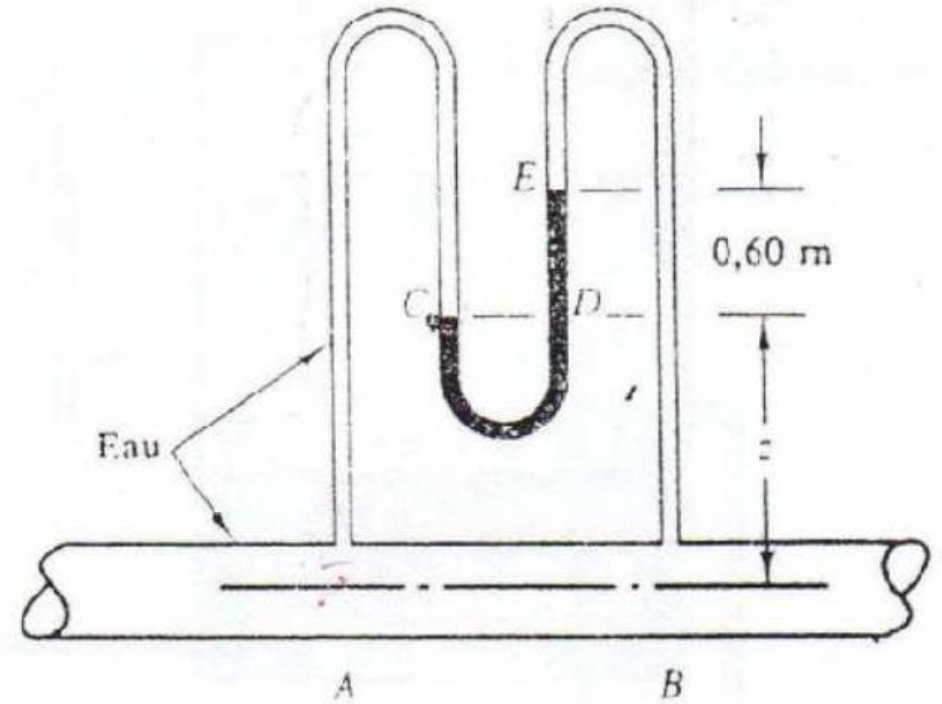
Calculer la dénivellation *h* du mercure du manomètre différentielle. On donne : $x + y = 2$ m et la densité du mercure $d = 13,57$.



Exercice 06 :

Un manomètre différentiel est fixé entre deux sections A et B d'un tuyau horizontal où s'écoule de l'eau. La dénivellation du mercure dans le manomètre est de $0,60\text{ m}$, le niveau le plus proche de A étant le plus bas.

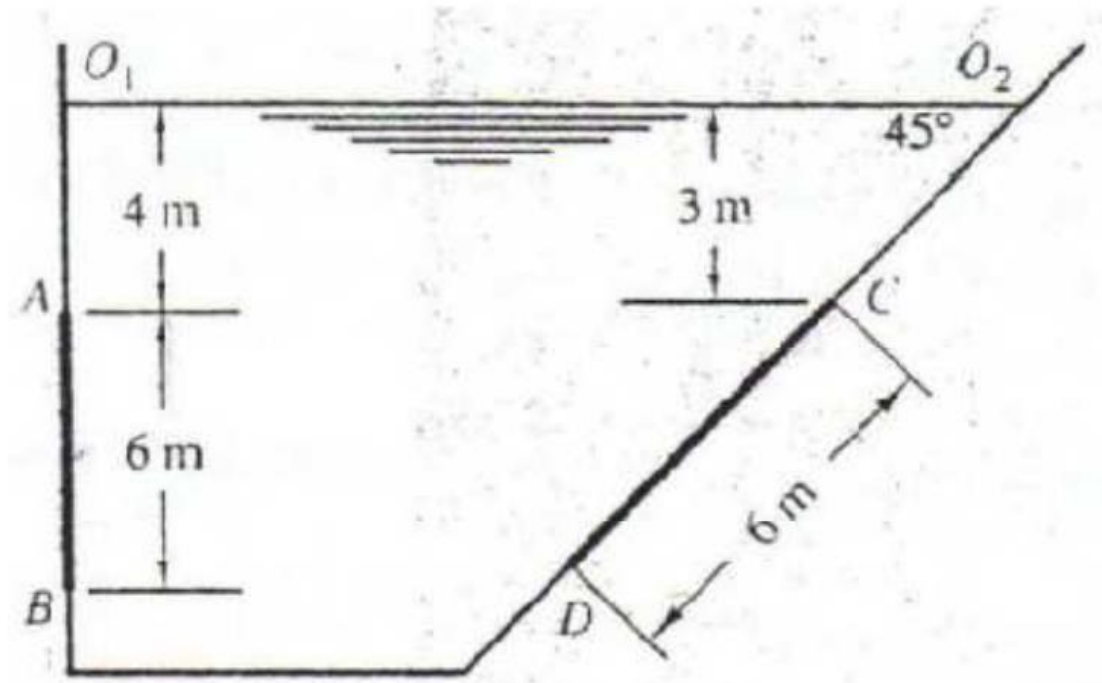
Calculer la différence de pression en Pa entre les sections A et B ($\rho_{\text{mercure}} = 13,57$).



Exercice 07 :

Le barrage de la figure ci-contre comporte deux portes d'évacuation d'eau AB et CD . Sachant que la porte en AB forme une surface rectangulaire de largeur $l=3$ m et la porte CD forme une surface triangulaire de base 4 m. Le sommet du triangle est en C .

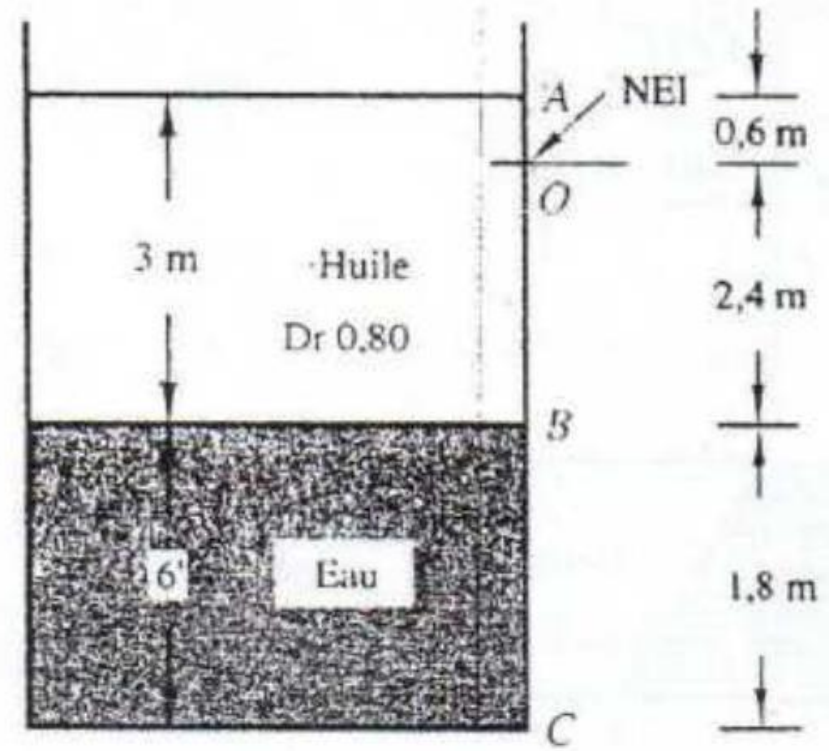
Calculer la force résultante due à l'action de l'eau sur les deux surfaces et la profondeur du centre de poussée.



Exercice 08 :

Le réservoir de la figure ci-contre contient de l'huile et de l'eau.

Déterminer la force résultante agissant sur le cote ABC qui à 1,20 m de large et la profondeur du centre de poussée.



Exercice 09 :

Un clapet incliné pivote autour du point O .

Si la largeur du clapet est de 1,2 m et que sa masse est de 2000 kg, déterminer la force verticale qui doit être appliquée au centre pour assurer la fermeture.

