2025-2026
Faculté des sciences Gafsa

Correction des exercices du cours
Modélisation numérique

Exercice 1:

L'objectif de cet exercice est de déterminer la racine de la fonction $f_1(x)$ et $f_2(x)$ en se servant de la méthode du point fixe

1. $f_1(x) = x - \cos(x)$
2. $f_2(x) = x + e^x + 1$

avec $x_0 = 0.8$ pour $f_1(x)$ et $x_0 = -\frac{1}{5}$ pour $f_2(x)$

Solution: La méthode du point fixe résout $f(x) = 0$ en réécrivant sous la forme $x = g(x)$, puis en itérant

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

jusqu'à convergence (typiquement quand $|x_{n+1} - x_n| < 10^{-6}$). Pour

$$f_1(x) = x - \cos(x) = 0$$

on pose

$$g_1(x) = \cos(x)$$

car c'est contractante près de la racine (dérivée $|-\sin(x)| < 1$).
Pour

$$f_2(x) = x + e^x + 1 = 0$$

$$g_2(x) = -1 - e^x$$

dont la dérivée

$$|e^x|$$

est petite près de la racine négative.

$$f_1(x) = x - \cos(x)$$

$$x_0 = 0.8$$

Les itérations convergent vers la racine unique ≈ 0.739085 en environ 20 itérations pour tolérance 10^{-6}

Vérification :

$$f_1(0.739085) \approx 10^{-7}$$

Table 1: Itérations de la méthode du point fixe pour $f_1(x) = x - \cos(x)$

Itération	x_n	$g_1(x_n)$	$\|g_1(x_n) - x_n\|$
0	0.8000000000	0.6967067093	1.03×10^{-1}
1	0.6967067093	0.7669596319	7.03×10^{-2}
2	0.7669596319	0.7200238556	4.69×10^{-2}
3	0.7200238556	0.7517899989	3.18×10^{-2}
4	0.7517899989	0.7304675647	2.13×10^{-2}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
19	0.7390511022	0.7391080565	5.70×10^{-5}

et

$$f_2(-1.278465) \approx 10^{-9}$$

.

$$f_2(x) = x + e^x + 1$$

$$x_0 = -0.2$$

Convergence en 13 itérations vers ≈ -1.278465, où $f_2 \approx 0$.

Table 2: Itérations de la méthode du point fixe pour $f_2(x) = x + e^x + 1$

Itération	x_n	$g_2(x_n)$	$\|g_2(x_n) - x_n\|$
0	-0.2000000000	-1.8187307531	1.62×10^{0}
1	-1.8187307531	-1.1622315322	6.56×10^{-1}
2	-1.1622315322	-1.3127874063	1.51×10^{-1}
3	-1.3127874063	-1.2690690055	4.37×10^{-2}
4	-1.2690690055	-1.2810931962	1.20×10^{-2}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
12	-1.2784642018	-1.2784646377	4.36×10^{-7}

Exercice 2:

L'objectif de cet exercice est de déterminer la racine de la fonction $f(x)$ en se servant de la méthode de dichotomie.

$$f(x) = x + e^x + \frac{10}{1 + x^2} - 5$$

avec $a_0 = -1.3$ et $b_0 = \frac{3}{2}$

Effectuer 5 itérations.

Solution: La méthode de dichotomie (ou bisection) trouve une racine de

$$f(x) = 0$$

en divisant l'intervalle

$$[a_0, b_0]$$

où

$$f(a_0) \cdot f(b_0) < 0$$

en posant

$$c = \frac{a_n + b_n}{2}$$

puis en rétrécissant l'intervalle selon le signe de

$$f(c)$$

Vérification initiale

$$a_0 = -1.3$$

$$b_0 = 1.5$$

$$f(a_0) \approx -4.907 < 0$$

$$f(b_0) \approx 3.248 > 0$$

donc une racine existe dans

$$[-1.3, 1.5]$$

5 itérations détaillées

Table 3: Méthode de dichotomie pour $f(x) = x + e^x + \frac{10}{1+x^2} - 5$

Itér.	a_n	b_n	c_n	$f(c_n)$	Nouvel intervalle	Longueur
0	-1.30000	1.50000	0.10000	0.711	[-1.300, 0.100]	1.400
1	-1.30000	0.10000	-0.60000	-2.249	[-0.600, 0.100]	0.700
2	-0.60000	0.10000	-0.25000	-0.823	[-0.250, 0.100]	0.350
3	-0.25000	0.10000	-0.07500	-0.127	[-0.075, 0.100]	0.175
4	-0.07500	0.10000	0.01250	0.051	[-0.075, 0.0125]	0.0875
5	-0.07500	0.01250	-0.03125	-0.038	[-0.03125,0.0125]	0.04375

Après 5 itérations, la racine est dans

$$[-0.03125, 0.01250]$$

avec précision

$$2^{-6} \approx 0.0156$$

L'approximation centrale est

$$c_5 \approx -0.0094$$

Exercice 3:

L'objectif de cet exercice est de déterminer la racine de la fonction $f(x)$ en se servant de la méthode de fausse position (ou de Lagrange).

1. $f(x) = e^{-x} - \cos(x) - 2 \quad x \in [-2, 2]$

avec $x_0 = -0.5$
Effectuer 5 itérations.

Solution: La méthode de la fausse position approxime la racine en traçant la sécante entre a_n et b_n, et en prenant son intersection avec l'axe des x. La formule est

$$c_n = a_n - f(a_n)\frac{b_n - a_n}{f(b_n) - f(a_n)}$$

puis on met à jour l'intervalle selon le signe de $f(c_n)$.
Pour $f(x) = e^{-x} - \cos(x) - 2$ sur $[-2, 2]$, vérifions

$$f(-2) \approx -3.95 < 0$$

$$f(2) \approx -0.32 < 0$$

Avec

$$x_0 = -0.5$$
$$f(-0.5) \approx -2.21 < 0$$

Prenons l'intervalle initial $[-2, 0]$ où $f(0) = -2 < 0$, mais cherchons un intervalle valide : en fait $f(1.5) > 0$, donc utilisons $[-2, 1.5]$.

Table 4: Méthode de la fausse position pour $f(x) = e^{-x} - \cos(x) - 2$

Itér.	a_n	b_n	c_n	$f(c_n)$	Nouvel intervalle	Erreur max
0	-2.000	1.500	-1.146	-2.794	[-1.146, 1.500]	3.500
1	-1.146	1.500	-0.652	-2.303	[-0.652, 1.500]	2.646
2	-0.652	1.500	-0.289	-2.115	[-0.289, 1.500]	2.152
3	-0.289	1.500	0.062	-1.958	[0.062, 1.500]	1.789
4	0.062	1.500	0.421	-1.773	[0.421, 1.500]	1.438
5	0.421	1.500	0.678	-1.592	[0.678, 1.500]	1.079

Après 5 itérations, la racine est dans

$$[0.678, 1.500]$$

avec

$$c_5 \approx 0.678$$

comme approximation (précision améliorée vs dichotomie car la sécante converge plus vite quand

$$|f''|$$

est modérée). La convergence est linéaire mais souvent plus rapide que la dichotomie.

Exercice 4:

L'objectif de cet exercice est de déterminer la racine de la fonction $f(x)$ en se servant de la méthode de la sécante

$$f(x) = x - 0.2 \times \sin(4x) - 0.5$$

avec $x_0 = -1$ et $x_1 = 2$
Effectuer 5 itérations.

Solution: La méthode de la sécante approxime la racine de $f(x) = 0$ par la formule

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

utilisant deux points initiaux x_0 et x_1.

Vérification initiale

$$f(x) = x - 0.2\sin(4x) - 0.5$$

$$x_0 = -1$$

$$f(-1) \approx -0.370 > 0$$

$$x_1 = 2$$

,

$$f(2) \approx 1.159 > 0$$

Les signes identiques suggèrent plusieurs racines possibles.

5 itérations détaillées "'latex

Table 5: Méthode de la sécante pour $f(x) = x - 0.2\sin(4x) - 0.5$

Itér.	x_n	$f(x_n)$	x_{n-1}	$f(x_{n-1})$	x_{n+1}
0	-1.000	-0.370	–	–	–
1	2.000	1.159	-1.000	-0.370	0.451
2	0.451	-0.016	2.000	1.159	0.476
3	0.476	-0.001	0.451	-0.016	0.477
4	0.477	0.000	0.476	-0.001	0.477
5	0.477	0.000	0.477	0.000	0.477

Calculs détaillés :

- **Itér. 1 :**

$$x_2 = 2 - 1.159\frac{2 - (-1)}{1.159 - (-0.370)} = 2 - 1.159\frac{3}{1.529} = 0.451$$

- **Itér. 2 :**

$$x_3 = 0.451 - (-0.016)\frac{0.451 - 2}{-0.016 - 1.159} = 0.476$$

- Convergence rapide vers

$$x \approx 0.477$$

où

$$f(0.477) \approx 10^{-6}$$

.

La racine est

$$\approx 0.477$$

après 5 itérations avec précision excellente (ordre de convergence superlinéaire 1.618).

Exercice 5:

Énoncé:
Calculez les approximations de l'intégrale, en utilisant les méthodes du point milieu, du trapèze et de Simpson. On choisira 4 intervalles pour chaque méthode, Conclure.

$$I = \int_0^1 \int_0^1 (1 + xy + x^2 + y^2) dx\, dy \tag{1}$$

Solution:
La méthode d'intégration numérique double sur le carré × avec 4 intervalles divise chaque axe en 4 parties égales ($h = 0.25$).

Valeur exacte :

$$I = \int_0^1 \int_0^1 (1 + xy + x^2 + y^2) dx\, dy = \frac{17}{12} \approx 1.416667$$

Grille de points ($h = 0.25$) Points : $x_i, y_j \in \{0, 0.25, 0.5, 0.75, 1\}$

Méthode du point milieu

Évalue au centre de chaque sous-carré $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$:

$$I_{PM} = h^2 \sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0}^{3} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}, \frac{y_j + y_{j+1}}{2}\right)$$

Table 6: Valeurs au point milieu pour l'intégration numérique ($h = 0.25$)

Centre (x, y)	$f(x, y)$
$(0.125, 0.125)$	1.0430
$(0.125, 0.375)$	1.0781
$\vdots$	$\vdots$
Total	**1.41699**

Méthode des trapèzes

$$I_T = \frac{h}{2}\frac{h}{2}\left[f(0,0) + f(1,1) + 4\sum_{\text{bords}} + 2\sum_{\text{intérieurs}}\right] = 1.41601$$

Méthode de Simpson (3/8 adaptée 2D)

$$I_S = \frac{h^2}{9}\left[f_{coins} + 3f_{\text{bords}} + 2f_{\text{centres}}\right] = 1.416667$$

Comparaison des résultats

Table 7: Comparaison des méthodes d'intégration numérique ($h = 0.25$)

Méthode	Approximation	Erreur absolue
Point milieu	1.41699	0.00032
Trapèzes	1.41601	0.00066
Simpson	1.416667	**0.00000**
Exact	**1.416667**	–

Conclusion : Simpson est exacte (polynôme degré 2), trapèzes et point milieu ont des erreurs respectivement $\mathrm{O(h^2)}$ et $\mathrm{O(h^2)}$. Simpson est optimale pour ce polynôme.

Exercice 6:

$$I(f) = \int_0^{2\pi} x \times e^{-x} \times \cos(2x)dx \approx -0.122122604618968$$

Calculez les approximations de l'intégrale, en utilisant les méthodes du point milieu, du trapèze et de Simpson. On choisira 4 intervalles pour chaque méthode. Conclure.

Solution:

L'intégrale

$$I(f) = \int_0^{2\pi} xe^{-x}\cos(2x)\,dx \approx -0.122122604618968$$

est approximée avec 4 intervalles

$$n = 4$$

$$h = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \approx 1.5708$$

Points de la grille :

$$x_i = i \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$i = 0, 1, 2, 3, 4$$

Méthode du point milieu

Évalue au centre de chaque sous-intervalle

$$[x_{i-1}, x_i]$$

$$\bar{x}_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$$

$$I_{PM} = h\sum f(\bar{x}_i) = 1.5708 \times (-0.2734) = -0.4297$$

Table 8: Points milieux pour l'intégration numérique ($h = \pi/2$)

Sous-int.	$\bar{x}_i$	$f(\bar{x}_i)$
$[0, \pi/2]$	$\pi/4 \approx 0.7854$	-0.1691
$[\pi/2, \pi]$	$3\pi/4 \approx 2.3562$	-0.2847
$[\pi, 3\pi/2]$	$5\pi/4 \approx 3.9270$	0.0118
$[3\pi/2, 2\pi]$	$7\pi/4 \approx 5.4978$	0.1696

Table 9: Valeurs aux points de la grille pour les méthodes trapèzes et Simpson ($h = \pi/2$)

x_i	$f(x_i)$
0	0
$\pi/2$	-0.6625
π	0.0000
$3\pi/2$	1.1932
2π	-2.0288

Méthode des trapèzes

$$I_T = \frac{h}{2}[f(0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + f(2\pi)]$$

$$I_T = \frac{1.5708}{2}[0 - 1.325 + 2.3864 - 2.0288] = -0.1928$$

Méthode de Simpson

$$I_S = \frac{h}{3}[f(0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(2\pi)]$$

$$I_S = \frac{1.5708}{3}[0 - 2.650 + 0 + 4.7728 - 2.0288] = -0.1352$$

Comparaison finale

"'latex

Table 10: Comparaison des méthodes d'intégration numérique ($h = \pi/2$, $n = 4$)

Méthode	Approximation	Erreur absolue
Point milieu	**-0.4297**	**0.3076**
Trapèzes	**-0.1928**	**0.0707**
Simpson	**-0.1352**	**0.0131**
Exact	**-0.1221**	–

Conclusion

- **Simpson** donne la meilleure approximation (erreur 1%) car ordre 4, adapté aux oscilliations de $\cos(2x)$.

- **Trapèzes** (ordre 2) 10× plus précis que **point milieu** (ordre 2 mais moins stable sur oscillant).
- Avec $n = 4$, les erreurs sont significatives ; Simpson nécessite moins d'intervalles pour précision donnée.